

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE.

BAND 58.



ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREY, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDENMANN, P. BRÜCKE.

VIERTE FOLGE.

BAND 58.

DER GANZEN REIHE 363. BAND.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

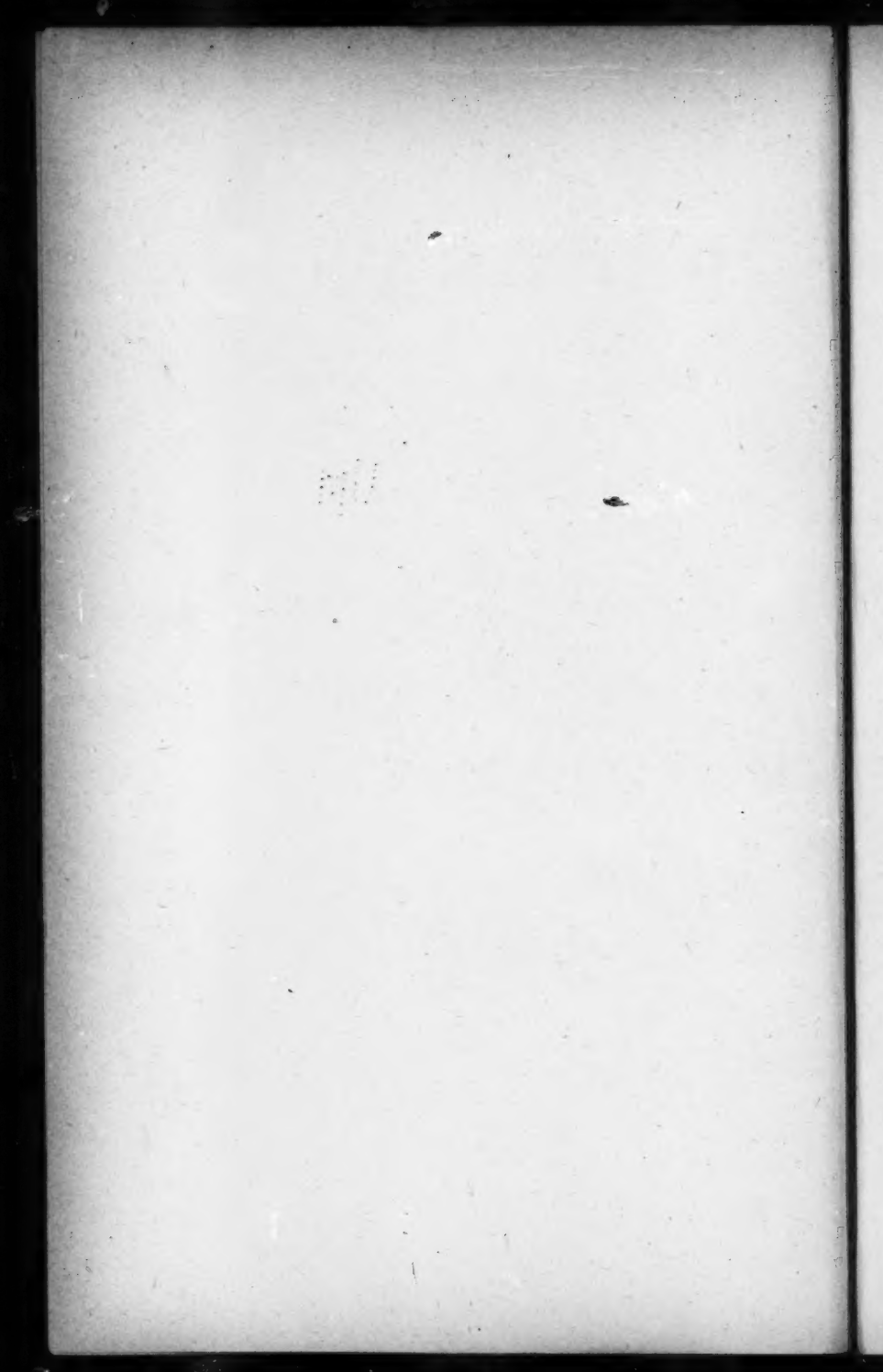
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1919.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.



Inhalt.

Vierte Folge. Band 58.

Erstes Heft.

Seite

1. H. Kafka. Zur vierdimensionalen Tensoranalysis 1
2. W. Steubing. Spektrale Intensitätsverschiebung und Schwächung der Jodfluoreszenz durch ein magnetisches Feld 55

Ausgegeben am 17. Januar 1919.

Zweites Heft.

1. W. Arkadiew. Über die Absorption elektromagnetischer Wellen an zwei parallelen Drähten 105
2. R. Ambrohn. Über die elektrische Leitfähigkeit von Natron—Kalk—Silikatgläsern 139
3. Max Berek. Über den senkrechten Durchgang linear polarisierter ebener Wellen durch planparallele Platten durchsichtiger inaktiver Kristalle 165
4. E. Ehrenhaft und D. Konstantinowsky. Bemerkung zum Nachtrage der R. Bärschen Arbeit: „Über die atomistische Struktur der Elektrizität 199

Ausgegeben am 14. Februar 1919.

Drittes Heft.

1. Gregor Huch. Versuch einer Theorie des Kanalstrahlenlichtes. (Zweite Abhandlung.) 201
2. L. Vegard. Die Kristallstruktur der Alaune und die Rolle des Kristallwassers. Bemerkungen zu den Äußerungen des Hrn. C. Schaefer und Frä. Martha Schubert 291

Ausgegeben am 25. Februar 1919.

344316

Viertes Heft.

Seite

1. Edgar Meyer. Über die Beeinflussung des Funkenpotentials durch ein transversales Magnetfeld 297
2. K. W. Meissner. Zur Kenntnis des Neonspektrums 383
3. J. Sommer. Über die lineare Differentialgleichung für gekoppelte elektrische Schwingungen und die Wurzeln der Gleichung vierten Grades 375

Ausgegeben am 14. März 1919.

Fünftes Heft.

1. A. Becker. Über die Bestimmung von Elektronen-Austrittsgeschwindigkeiten 393
2. R. J. Humm. Über die Energiegleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie 474
3. W. Jaeger und H. von Steinwehr. Über den Wert des mechanischen Wärmeäquivalents 487

Ausgegeben am 4. April 1919.

Sechstes Heft.

1. G. Borelius. Zur Elektronentheorie des Magnetismus und des Halleffektes 469
2. Jan Weyssenhoff. Über die Reflexion von Quecksilbermolekülen an Gold bei tiefen Temperaturen 505
3. A. March. Zur Thermodynamik der Kapillarität 515
4. Walter Dällenbach. Die allgemein kovarianten Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes im Innern ponderabler Materie vom Standpunkt der Elektronentheorie 528
5. G. Quincke. Elektrische Zerstäubung von geschmolzenem Siegellack 549
6. Paul S. Epstein. Theoretisches über den Starkeffekt in der Fowlerschen Heliumserie 553

Ausgegeben am 25. April 1919.

Siebentes Heft.

1. J. Holtsmark. Über die Verbreiterung von Spektrallinien 577
2. O. Lehmann. Über die Beziehungen zwischen mechanischer und chemischer Verdrehung der Struktur flüssiger Kristalle 681

Ausgegeben am 9. Mai 1919.

Achtes Heft.

Seite

1. Fritz Reiche. Zur Quantentheorie der Rotationswärme des Wasserstoffs	657
2. M. v. Laue. Unter welchen Bedingungen kann man von einem Elektronengas reden?	695
3. J. Stark und O. Hardtke. Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. IX. Vergleich von Dupletserien	712
4. J. Stark. Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. X. Zusammenhang der Serien eines Systems	723
5. E. Brose. Stärke des elektrischen Feldes und Zerlegung der Wasserstofflinien vor der Kathode des Glimmstroms	731
6. E. Grüneisen. Die thermische Ausdehnung regulär kristallisierender fester Körper. (Zweite Mitteilung.)	753
7. F. Henning. Zur Verdampfungswärme des Wassers	759

Ausgegeben am 27. Mai 1919.

ERA

JUN

NI

1910
GENERAL LIBRARY
JUN 21 1919
UNIV. OF MICH.

45
No. 1.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 78. Heft 1.

DER GANZEN REIHE 368. BANDES 1. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 66 M.

Ausgegeben am 17. Januar 1910.

Inhalt.

	Seite
1. H. Kafka. Zur vierdimensionalen Tensoranalysis	1
2. W. Steubing. Spektrale Intensitätsverschiebung und Schwächung der Jodfluoreszenz durch ein magnetisches Feld . . .	55

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 58.

1. Zur vierdimensionalen Tensoranalysis; von H. Kafka.

1. Die bisherigen Analysen der als geometrische Größen bezeichneten Invarianten im R_4 , die der Form nach den im R_3 gebräuchlichen nachgebildet sind, operieren direkt mit den geometrischen Größen. Diese Rechnungsmethoden haben den Nachteil, daß bei Multiplikationen mehrerer Faktoren eine Assoziationsänderung im allgemeinen auch eine Änderung der multiplikativen Verknüpfung im Gefolge hat, wodurch ihre Anwendung ziemlich erschwert wird.

Die genannte Schwierigkeit erscheint in der von Hrn. Prof. Einstein für die allgemeine Relativitätstheorie (im folgenden a. R. T. bezeichnet) entwickelten Tensoranalysis¹⁾ vermieden, die im Gegensatz zu den eingangs erwähnten Rechnungsmethoden mit den Bestimmungsgrößen operiert; außerdem hat diese Analysis den großen Vorzug, daß sie die einheitliche Behandlung von geometrischen Größen beliebig hoher Ordnung ermöglicht. Es läßt sich auf dem von Einstein gewiesenen Wege ein mathematisches Rüstzeug erhalten, welches den zu behandelnden Problemen angepaßt ist und Einfachheit mit Allgemeinheit verbindet.

Wenn es sich nur um Probleme der speziellen Relativitätstheorie (im folgenden sp. R. T. bezeichnet) handelt, läßt sich die Einsteinsche Tensoranalysis wesentlich vereinfachen. Im folgenden soll für diesen Fall der Aufbau einer Tensoranalysis skizziert werden, in welcher die symmetrischen und antisymmetrischen Tensoren eine ihrer Bedeutung entsprechende besondere Berücksichtigung finden.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich auch einige Worte über die Bezeichnungsweise verlieren, deren Einheitlichkeit bekanntlich sehr viel zu wünschen übrig läßt; dies mag zum

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 49. p. 776. 1916.

Teil davon kommen, daß es sich um ein noch in der Entwicklung befindliches mathematisches Gebiet handelt, welches von sehr verschiedenen Seiten in Angriff genommen wurde. Gerade deshalb wäre aber eine gewisse Zurückhaltung bei der Festlegung von Bezeichnungen am Platze und sollten diese zumindest so allgemein als möglich gewählt werden. Von diesem Standpunkte aus erscheint mir die Bezeichnung „Tensor“ für geometrische Größen beliebig hoher Ordnung empfehlenswerter als die Bezeichnung „Affinor“, welche ursprünglich für geometrische Größen zweiter Ordnung wegen ihres Zusammenhanges mit affinen Transformationen verwendet wurde. Für den Tensor 1. Ordnung mag die Bezeichnung „Vektor“ als altvertraut beibehalten werden. Die Bezeichnung „Tensor“ wird von vielen Seiten für symmetrische geometrische Größen verwendet, die ich mit Einstein als „symmetrische Tensoren“ bezeichnen will; ihr Gegenstück soll „antisymmetrischer Tensor“ oder kürzer „Antitensor“ (nach Budde¹⁾) heißen.

2. Ein Tensor 1. Ordnung oder Vierervektor ist der Inbegriff von 4 Größen, welche gewisse Transformatienseigenschaften besitzen. In der sp. R. T. läßt sich ein Vierervektor geometrisch etwa unter dem Bilde einer gerichteten Strecke vorstellen, wobei die 4 Größen die Projektionen dieser Strecke auf die Achsenrichtungen eines orthogonalen vierdimensionalen Koordinatensystems bestimmen können. In der a. R. T. ist eine solche geometrische Deutung nicht möglich; den 4 Größen entsprechen dort Parameter dreidimensionaler Räume, welche durch ihren Schnitt einen Punkt eines vierdimensionalen Gaußischen Koordinatensystems bestimmen.

Wenn wir uns einen Vierervektor der sp. R. T. unter dem Bilde einer gerichteten Strecke vorstellen und die 4 Größen als Projektionen dieser Strecke deuten, so ändern sich letztere bei einer Drehung des Bezugssystems (welche bekanntlich die der sp. R. T. eigentümliche Transformationsart ist) nach dem Gesetze

$$A_i = p_{i1} A'_1 + p_{i2} A'_2 + p_{i3} A'_3 + p_{i4} A'_4 = \sum_r p_{ir} A'_r \quad (r = 1, 2, 3, 4).$$

1) E. Budde, Tensoren und Dyaden im dreidimensionalen Raum. p. 62. Vieweg, Braunschweig 1914.

Die Verwendung des Summenzeichens läßt sich durch die Festsetzung vermeiden, daß über paarweise auftretende Zeiger (im folgenden „Summenzeiger“ genannt) von 1—4 zu summieren ist. Diese von Einstein herrührende Bezeichnungsweise erweist sich in der Folge als sehr fruchtbar. Wir schreiben also

$$(1) \quad A_i = p_{ir} A_r',$$

wobei die Determinante

$$|p_{ir}| = p$$

Transformationsdeterminante genannt wird. Die symbolische Bezeichnung A_i wird je nach Bedarf für den Vierervektor selbst oder seine Bestimmungsgrößen verwendet.

Von der geometrischen Deutung abgesehen, wird durch das Transformationsgesetz (1) zum Ausdruck gebracht, daß 4 Größen A_i durch 4 andere (A_r') ersetzt werden können, wobei in den Überführungsgleichungen außer den genannten Größen nur die Elemente der Transformationsdeterminante auftreten. Durch den Inbegriff von 4 Größen, welche das Transformationsgesetz (1) erfüllen, wollen wir nun ganz allgemein einen Tensor 1. Ordnung oder Vierervektor definieren. Über den Zusammenhang der Tensorbildung mit der Transformationsart wird im Abschnitt 4 die Rede sein.

Für die Addition und Subtraktion von Vierervektoren gelten die Gesetze

$$(2) \quad \begin{cases} C_i = A_i + B_i, \\ D_i = A_i - B_i, \end{cases}$$

welche je vier Gleichungen zusammenfassen.

3. Äußere Multiplikation von 2 Vierervektoren; Tensoren 2. Ordnung. — Aus den Bestimmungsgrößen zweier Vierervektoren lassen sich durch eine multiplikative Verknüpfung, die sogenannte „äußere Multiplikation“ (Bezeichnung nach Einstein bzw. Grassmann) die Bestimmungsgrößen eines Tensors 2. Ordnung bilden. Die äußere Multiplikation zweier Vierervektoren A_i und B_k besteht darin, daß die 16 möglichen Produkte $A_i B_k$ der Bestimmungsgrößen beider Vektoren gebildet werden, für welche Produkte das Transformationsgesetz

$$(3) \quad A_i B_k = p_{ir} p_{ks} A_r' A_s'$$

gilt. In dem Ausdruck auf der rechten Seite treten zwei Paare gleicher Zeiger auf und ist entsprechend der früheren Festsetzung über die 16 Variationen zu zwei der Elemente 1—4 zu summieren.

Wir wollen nun den Inbegriff von 16 Größen C_{ik} , welche das Transformationsgesetz

$$(3a) \quad C_{ik} = p_{ir} p_{ks} C_{rs}'$$

befolgen, einen Tensor 2. Ordnung nennen. Durch (3a) wird ausgedrückt, daß 16 Größen C_{ik} durch 16 andere (C_{rs}') ersetzt werden können, wobei in den Überführungsgleichungen außer den genannten Größen nur die Elemente der Transformationsdeterminante auftreten.

Die allgemeinste Größe dieser Art läßt sich durch die Summe von 4 äußeren Produkten nach dem Typus (3) darstellen.

Was die geometrische Deutung anlangt, läßt sich ein Tensor 2. Ordnung unter dem Bilde einer vierdimensionalen Fläche zweiter Ordnung vorstellen. Diese geometrische Deutung ist aber in der allgemeinen Tensoranalysis ziemlich unwesentlich.

Für die Addition und Subtraktion von Tensoren 2. Ordnung gelten die Gesetze

$$(4) \quad \begin{cases} C_{ik} = A_{ik} + B_{ik}, \\ D_{ik} = A_{ik} - B_{ik}. \end{cases}$$

4. Äußere Multiplikationen, die zu Tensoren höherer Ordnung führen. — Bei der äußeren Multiplikation von 3 Vierervektoren A_i , B_k und C_l bilden wir die 64 möglichen Produkte $A_i B_k C_l$ der Bestimmungsgrößen dieser Vektoren, für welche Produkte das Transformationsgesetz

$$(5) \quad A_i B_k C_l = p_{ir} p_{ks} p_{lt} A_r' B_s' C_t'$$

gilt. Auf der rechten Seite von (5) ist wegen des Auftretens dreier Paare von Summenzeigern über die 64 Variationen zu drei der Elemente 1—4 zu summieren.

Wir bezeichnen nun entsprechend den früheren Ausführungen als Tensor 3. Ordnung den Inbegriff von 64 Größen D_{ikl} , welche das Transformationsgesetz

$$(5a) \quad D_{ikl} = p_{ir} p_{ks} p_{lt} D_{rst}'$$

erfüllen. Die allgemeinste Größe dieser Art läßt sich wieder aus 4 äußeren Produkten nach dem Typus (5) zusammensetzen.

Auf einen Tensor 3. Ordnung führt auch das äußere Produkt

$$A_i B_{kl}$$

eines Vierervektors und eines Tensors 2. Ordnung.

Die äußeren Produkte

$$A_i B_k C_l D_m, A_i B_{klm}, A_{ik} B_{lm}$$

führen zu Tensoren 4. Ordnung mit 256 Bestimmungsgrößen. Auf die gleiche Weise lassen sich durch äußere Multiplikation Tensoren beliebig hoher Ordnung bilden.

Zusammenfassend können wir demnach Tensoren als den Inbegriff einer Anzahl von Bestimmungsgrößen definieren, welche durch eine gleiche Anzahl anderer ersetzt werden können, wobei in den Überführungsgleichungen außer den genannten Größen nur die Elemente der der Tensorbildung zugrunde gelegten Transformationsdeterminante auftreten. Diese Definition ist vielleicht etwas einseitig, da die Bestimmungsgrößen der Tensoren nur Hilfsmittel für die mathematische Erfassung dieser Gebilde darstellen, während die Tensoren selbst von jedem Bezugssystem unabhängige Invarianten sind.

Zusammenhang der Tensorbildung mit der Transformationsart. — Da zur Definition der Tensoren Transformationsgesetze herangezogen wurden, ist es wohl klar, daß die Transformationsart bei der Tensorbildung eine wesentliche Rolle spielt. Über diese Beziehungen hat Schouten¹⁾ sehr eingehende Untersuchungen angestellt. Wir könnten z. B. Tensoren 1. Ordnung oder Vierervektoren auch dadurch definieren, daß wir in die Bedingungsgleichung (1) statt der Elemente der Transformationsdeterminante ihre normierten Hauptminoren einführen; derartige Bildungen bezeichnet Einstein als kovariante Tensoren 1. Ordnung oder Vierervektoren zum Unterschied von den kontravarianten, in deren Definitionsgleichung die Elemente der Transformationsdeterminante auftreten. Aus kovarianten Vierervektoren lassen sich wieder durch äußere Multiplikation kovariante Tensoren beliebig hoher Ordnung bilden.

In der a. R. T. ist diese Unterscheidung durch die in Frage kommenden allgemeineren Transformationsarten be-

1) J. A. Schouten, Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis. B. G. Teubner, Leipzig 1914.

dingt. Je allgemeiner diese sind, umso größere Verschiedenheiten zeigen die möglichen Tensorbildungen. In der sp. R. T. handelt es sich dagegen nur um Drehungen eines orthogonalen vierdimensionalen Koordinatensystems; die Transformationsdeterminante ist dann orthogonal, d. h. ihr Wert ist Eins und die Elemente sind ihren Hauptminoren gleich, so daß der Unterschied zwischen Kontravarianz und Kovarianz verschwindet.

5. Symmetrische und antisymmetrische Tensoren 2. Ordnung und die ihnen entsprechenden speziellen äußeren Multiplikationen. — Wenn wir uns die 16 Bestimmungsgrößen eines Tensors 2. Ordnung A_{ik} in einer Reihe nebeneinander angeschrieben denken, so lassen sich aus ihnen die Bestimmungsgrößen eines zweiten Tensors A_{ki} zusammenstellen, indem die Bestimmungsgrößen mit ungleichen Zeigern miteinander vertauscht werden. Diese invariante Bildung wird gewöhnlich als Konjugation bezeichnet.

Aus den Bestimmungsgrößen zweier konjugierter Tensoren 2. Ordnung lassen sich durch Addition bzw. Subtraktion die Bildungen

$$(6) \quad A_{\overline{ik}} = \overline{A}_{ik} = A_{ik} + A_{ki}; \quad \overline{A}_{ik} = \overline{A}_{ki}^{\bullet}$$

und

$$(7) \quad A_{\underline{ik}} = \underline{A}_{ik} = A_{ik} - A_{ki}; \quad \underline{A}_{ik} = -\underline{A}_{ki}$$

ableiten. Die erstere ist dadurch charakterisiert, daß ihre Bestimmungsgrößen bei Vertauschung der Zeiger ungeändert bleiben, so daß nur 10 verschieden sind. Die Bezeichnung „verschieden“ ist aber im allgemeinen nicht gleichbedeutend mit „unabhängig“. Wir wollen derartige Bildungen als symmetrische Tensoren 2. Ordnung bezeichnen und ihre Symbole mit einem oberen Querstrich versehen (\overline{A}_{ik}), wenn sie von vornherein symmetrische Eigenschaften besitzen.

Bei der zweiten Bildung ändert die Vertauschung der Zeiger das Vorzeichen der Bestimmungsgrößen, während jene mit gleichen Zeigern verschwinden, so daß nur 6 numerisch verschiedene Bestimmungsgrößen resultieren. Diese Bildungen seien antisymmetrische Tensoren oder Antitensoren 2. Ordnung genannt und ihre Symbole durch fetten Druck (in der Schrift durch Unterstreichung) hervorgehoben (\underline{A}_{ik}), wenn sie von vornherein antisymmetrische Eigenschaften besitzen.

Aus (6) und (7) folgt die Zerlegung eines beliebigen Tensors 2. Ordnung in einen symmetrischen und antisymmetrischen Teil:

$$(8) \quad A_{ik} = \frac{1}{2} \bar{A}_{ik} + \frac{1}{2} \underline{A}_{ik}.$$

Der Nachweis, daß es sich in (6) und (7) um invariante Bildungen handelt, ergibt sich wie folgt. Nach (3a) ist

$$A_{ik} = p_{ir} p_{ks} A_{rs}' = p_{is} p_{kr} A_{sr}'$$

(die Vertauschung von *Summenzeigern* ist ohneweiters erlaubt)

bzw.

$$A_{ki} = p_{kr} p_{is} A_{rs}' = p_{ks} p_{ir} A_{sr}';$$

eine einfache Überlegung zeigt, daß

$$A_{ik} + A_{ki} = \frac{1}{2} (p_{ir} p_{ks} + p_{kr} p_{is}) (A_{rs}' + A_{sr}')$$

oder

$$(9) \quad \bar{A}_{ik} = \frac{1}{2} (p_{ir} p_{ks} + p_{kr} p_{is}) \bar{A}_{rs}'.$$

Andererseits ist

$$A_{ik} - A_{ki} = \frac{1}{2} (p_{ir} p_{ks} - p_{kr} p_{is}) (A_{rs}' - A_{sr}')$$

oder

$$(10) \quad \underline{A}_{ik} = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} p_{ir} & p_{is} \\ p_{kr} & p_{ks} \end{array} \right| \underline{A}_{rs}'.$$

Die Entwicklung der rechten Seite von (10) nach den Summenzeigern r und s reduziert sich auf 12 Summanden, von denen je 2 gleich sind; es lassen sich demnach die 6 numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen eines Antitensors 2. Ordnung durch 6 andere ersetzen, wobei in den Überführungsgleichungen außer den genannten Größen nur die Elemente der Transformationsdeterminante auftreten.

Bei dieser Gelegenheit wäre zu bemerken, daß die 6 numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen eines Antitensors 2. Ordnung auch zur Bildung eines „Sechservektors“¹⁾ herangezogen werden können. In der allgemeinen Tensoranalysis empfiehlt es sich aber, die Einführung von Sechservektoren zu vermeiden und mit den Antitensoren 2. Ordnung zu operieren, welche letztere in den multiplikativen Verknüpfungen wie gewöhnliche Tensoren 2. Ordnung zu behandeln sind.

1) M. Laue, Das Relativitätsprinzip. p. 73. Vieweg, Braunschweig 1913.

Im Anschluß an das Vorstehende lassen sich multiplikative Verknüpfungen einführen, welche aus 2 Vierervektoren einen symmetrischen Tensor bzw. einen Antitensor 2. Ordnung erzeugen. Wir wollen die erstere die „äußere symmetrische“ (Bezeichnung $\overline{A_i B_k}$), die letztere die „äußere antitensorische Multiplikation“ (Bezeichnung $\underline{A_i B_k}$) nennen. Es ist

$$(11) \quad \overline{A_i B_k} = A_i B_k + A_k B_i; \quad \underline{A_i B_k} = A_k B_i,$$

bzw.

$$(12) \quad \underline{A_i B_k} = A_i B_k - A_k B_i = \begin{vmatrix} A_i & A_k \\ B_i & B_k \end{vmatrix}; \quad \underline{A_i B_i} = - \underline{A_k B_k}.$$

Durch die in (11) und (12) eingeführte Bezeichnungsweise werden wir in der Folge alle multiplikativen Verknüpfungen gewöhnlicher Tensoren hervorheben, welche auf vollständig symmetrische Tensoren bzw. Antitensoren führen.

Das äußere Produkt zweier Vierervektoren läßt sich entsprechend (8) in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegen:

$$(13) \quad A_i B_k = \frac{1}{2} \overline{A_i B_k} + \frac{1}{2} \underline{A_i B_k}.$$

Es gibt auch spezielle Tensoren 2. Ordnung, welche dadurch charakterisiert sind, daß nur die 4 Bestimmungsgrößen mit gleichen Zeigern von Null verschieden sind. Ein Beispiel einer derartigen Bildung ist der von Einstein eingeführte spezielle Tensor δ_{ik} , dessen nicht verschwindende Bestimmungsgrößen sämtlich gleich Eins sind:

$$(14) \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = k, \\ 0 & \text{wenn } i \neq k. \end{cases}$$

Mit Benutzung von δ_{ik} läßt sich ein äußeres symmetrisches Produkt zweier Vierervektoren folgendermaßen zerlegen:

$$(15) \quad \frac{1}{2} \overline{A_i B_k} = \frac{1}{4} \delta_{ik} A_i B_k + \left(\frac{1}{2} \overline{A_i B_k} - \frac{1}{4} \delta_{ik} A_i B_k \right).$$

Das erste Glied der rechten Seite von (15) ist ein spezieller Tensor von der gleichen Art wie δ_{ik} , nur sind seine 4 nicht verschwindenden Bestimmungsgrößen gleich

$$\frac{1}{4} (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4);$$

diese Bildung entspricht, von dem Faktor $\frac{1}{4}$ abgesehen, dem „inneren Produkt“ der Vierervektoren A_i und B_k (siehe Ab-

schnitt 10). — Der Klammerausdruck auf der rechten Seite von (15) führt auf einen symmetrischen Tensor, welcher die Eigenschaft besitzt, daß seine Verjüngung (vgl. Abschnitt 9) verschwindet. Schouten¹⁾ bezeichnet die analoge Bildung im R_3 als „Deviator“ und die ihr entsprechende multiplikative Verknüpfung als „deviatorische Multiplikation“.

6. Spezielle Tensoren 3. Ordnung. — Aus den 64 Bestimmungsgrößen eines Tensors 3. Ordnung lassen sich durch Vertauschung die Bestimmungsgrößen von 6 „konjugierten“ Tensoren

$$A_{ikl}, A_{ilk}, A_{kli}, A_{kil}, A_{lik}, A_{lki}$$

zusammenstellen, welche in verschiedener Weise additiv und subtraktiv vereinigt werden können. Im folgenden sollen nur die wichtigsten Bildungen betrachtet werden.

Die Addition von 2 konjugierten Tensoren, welche sich durch Vertauschung zweier Zeiger unterscheiden, ergibt Bildungen von der Form

$$(16) \quad A_{i\overline{k}\overline{l}} = A_{ikl} + A_{ilk}.$$

Die Bestimmungsgrößen des Tensors $A_{i\overline{k}\overline{l}}$ sind bezüglich der überklammerten Zeiger symmetrisch, d. h. sie bleiben bei Vertauschung dieser Zeiger ungeändert; wir wollen derartige Tensoren „partiell symmetrisch“ nennen. — Die 64 Bestimmungsgrößen setzen sich in dem vorliegenden Fall aus 24 gleichen Paaren und 16 einzelstehenden zusammen, so daß im ganzen 40 verschiedene Bestimmungsgrößen resultieren.

Andererseits führt die Subtraktion von 2 konjugierten Tensoren, welche sich durch Vertauschung zweier Zeiger unterscheiden, auf „partiell antisymmetrische“ Tensoren:

$$(17) \quad A_{i\overline{k}\underline{l}} = A_{ikl} - A_{ilk}.$$

Die Vertauschung der unterklammerten Zeiger ändert das Vorzeichen der Bestimmungsgrößen, während jene mit 2 gleichen unterklammerten Zeigern verschwinden. Die Bildung (17) hat 24 numerisch gleiche Paare von Bestimmungsgrößen, die restlichen 16 verschwinden.

Auf einen partiell symmetrischen Tensor führt auch die Summe zweier partiell antisymmetrischer Tensoren

$$(18) \quad A_{i\overline{k}\underline{l}} + A_{\overline{k}\underline{l}i} = A_{ikl} - A_{ilk} + A_{kii} - A_{kll}.$$

1) l. c. p. 69.

Die Vertauschung der Zeiger i und k läßt die Bestimmungsgrößen des resultierenden Tensors ungeändert; diese Bildung besitzt wie (16) 24 Paare gleiche Bestimmungsgrößen, von den restlichen 16 verschwinden aber 4 (wenn $i = k = l$), so daß nur 36 verschiedene Bestimmungsgrößen übrig bleiben.

Die Differenz

$$A_{i\bar{k}l} - A_{k\bar{i}l}$$

ergibt einen partiell antisymmetrischen Tensor vom Typus (17).

Die Summe dreier konjugierter Tensoren mit zyklisch vertauschten Zeigern ergibt einen Tensor mit 20 Gruppen von je 3 gleichen Bestimmungsgrößen, die restlichen 4 sind einzelstehend (24 verschiedene); wir könnten denselben als „zyklisch symmetrisch“ bezeichnen, da die zyklische Vertauschung der Zeiger die Bestimmungsgrößen ungeändert läßt.

Der Nachweis für die Invarianz der vorstehend angedeuteten Tensorbildungen läßt sich auf dem im Abschnitt 5 verwendeten Wege erbringen.

Besonderes Interesse beansprucht die Bildung

$$(19) \quad A_{\overline{7}E\overline{7}} = \overline{A}_{ikl} = A_{ikl} + A_{ilk} + A_{kli} + A_{kli} + A_{lik} + A_{lki},$$

welche einen vollständig symmetrischen Tensor 3. Ordnung darstellt, und ihr Gegenstück, der vollständig antisymmetrische Tensor oder Antitensor 3. Ordnung

$$(20) \quad A_{\underline{1}\bar{k}l} = \underline{A}_{ikl} = A_{ikl} - A_{ilk} + A_{kli} - A_{kli} + A_{lik} - A_{lki}.$$

Die Überklammerung einer Anzahl von Zeigern hat hier und in der Folge die Bedeutung, daß über alle Ausdrücke, welche durch Permutation der überklammerten Zeigerfolge erhalten werden, zu summieren ist; bei der Unterklammerung von Zeigern sind die Permutationen, welche in bezug auf die gegebene Zeigerfolge ungerade sind, negativ zu nehmen. Die Vertauschung überklammerter Zeiger läßt daher den Wert des betreffenden Tensorausdrucks ungeändert, während die Vertauschung zweier unterklammerter Zeiger das Vorzeichen eines solchen Ausdrucks ändert.

Bei vollständig symmetrischen Tensoren können die Zeiger beliebig vertauscht werden. Eine einfache Überlegung ergibt, daß eine derartige Bildung 3. Ordnung

- 4 Gruppen zu je 6 gleichen Bestimmungsgrößen
(alle Zeiger verschieden),
12 Gruppen zu je 3 gleichen Bestimmungsgrößen
(2 Zeiger gleich)
und 4 einzelstehende Bestimmungsgrößen
(alle 3 Zeiger gleich)

besitzt; die Anzahl der numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen ist also gleich 20.

Bei den Antitensoren 3. Ordnung verschwinden alle Bestimmungsgrößen mit gleichen Zeigern, so daß nur 4 Gruppen zu je 6 numerisch gleichen Bestimmungsgrößen übrigbleiben. Aus den 4 numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen eines Antitensors 3. Ordnung läßt sich ein Vierervektor, die „Ergänzung“ des Antitensors 3. Ordnung ableiten (vgl. Abschnitt 12).

Für die Kennzeichnung von Tensoren, welche von vornherein symmetrische bzw. antisymmetrische Eigenschaften besitzen, wollen wir an Stelle der Klammern einfache Striche verwenden, ferner seien Antitensoren durch fetten Druck ihrer Symbole (in der Schrift durch Unterstreichung) hervorgehoben.

Für den vollständig symmetrischen Tensor 3. Ordnung gilt das Transformationsgesetz

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{A}_{ikl} = \frac{1}{6} & (p_{ir} p_{ks} p_{lt} + p_{ir} p_{ls} p_{kt} + p_{kr} p_{ls} p_{it} \\ & + p_{kr} p_{is} p_{lt} + p_{lr} p_{is} p_{kt} + p_{lr} p_{ks} p_{it}) \bar{A}'_{rst}, \end{aligned} \right.$$

für den Antitensor

$$(22) \quad A_{ikl} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} p_{ir} & p_{is} & p_{it} \\ p_{kr} & p_{ks} & p_{kt} \\ p_{lr} & p_{ls} & p_{lt} \end{vmatrix} A'_{rst}.$$

7. Im Anschluß an die Ausführungen des vorhergehenden Abschnittes lassen sich spezielle äußere Multiplikationen definieren, welche auf spezielle Tensoren 3. Ordnung führen. Von den hierher gehörigen multiplikativen Verknüpfungen dreier Vierervektoren sind die wichtigsten die äußere vollständig symmetrische Multiplikation

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} A_i B_k C_l = \overline{A_i B_k C_l} &= A_i B_k C_l + A_i B_l C_k + A_k B_l C_i + A_k B_i C_l \\ &+ A_l B_i C_k + A_l B_k C_i \end{aligned} \right. \\ \text{(ergibt einen vollständig symmetrischen Tensor vom Typus 19)}$$

und das äußere Antitensorprodukt

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} A_i B_k C_l &= \underline{A_i B_k C_l} = A_i B_k C_l - A_i B_l C_k + A_k B_l C_i \\ &\quad - A_k B_i C_l + A_l B_i C_k - A_l B_k C_i \\ &\quad \text{(ergibt einen Antitensor vom Typus 20).} \end{aligned} \right.$$

Die letztere Bildung kann auch in der Form

$$(24a) \quad \underline{A_i B_k C_l} = \begin{vmatrix} A_i & A_k & A_l \\ B_i & B_k & B_l \\ C_i & C_k & C_l \end{vmatrix}$$

geschrieben werden, wobei

$$(24b) \quad \left\{ \begin{aligned} \underline{A_i B_k C_l} &= -\underline{A_i B_l C_k} = \underline{A_k B_l C_i} = -\underline{A_k B_i C_l} = \underline{A_l B_i C_k} \\ &= -\underline{A_l B_k C_i}. \end{aligned} \right.$$

Die Entwicklung der Determinante in (24a) nach Hauptminoren ergibt Beziehungen von der Form

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \underline{A_i B_k C_l} &= A_i (B_k C_l - B_l C_k) + A_k (B_l C_i - B_i C_l) + A_l (B_i C_k - B_k C_i) \\ &= A_i \underline{B_k C_l} + A_k \underline{B_l C_i} + A_l \underline{B_i C_k} \text{ [nach (12)]}. \end{aligned} \right.$$

In der letzten Zeile erscheinen partiell antisymmetrische Tensoren vom Typus (17).

Spezielle Tensoren 3. Ordnung lassen sich auch durch multiplikative Verknüpfungen von Vierervektoren mit Tensoren 2. Ordnung erzeugen. Als Beispiele führen wir an:

Die äußere partiell symmetrische Multiplikation

$$(26) \quad A_i B_{kl} = A_i B_{kl} + A_k B_{il} \\ \text{(ergibt einen speziellen Tensor vom Typus 16);}$$

die äußere partiell antisymmetrische Multiplikation

$$(27) \quad A_i B_{k\bar{l}} = A_i B_{kl} - A_l B_{ki} \\ \text{(ergibt einen speziellen Tensor vom Typus 17);}$$

die äußere vollständig symmetrische Multiplikation

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{A_i B_{kl}} &= A_i (B_{kl} + B_{lk}) + A_k (B_{li} + B_{il}) + A_l (B_{ik} + B_{ki}) \\ &= A_i \overline{B_{kl}} + A_k \overline{B_{li}} + A_l \overline{B_{ik}} \text{ [nach (6)]} \end{aligned} \right.$$

und die äußere antitensorische Multiplikation der genannten Tensoren

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \underline{A_i B_{kl}} &= A_i (B_{kl} - B_{lk}) + A_k (B_{li} - B_{il}) + A_l (B_{ik} - B_{ki}) \\ &= A_i \underline{B_{kl}} + A_k \underline{B_{li}} + A_l \underline{B_{ik}} \text{ [nach (7)]}. \end{aligned} \right.$$

Schließlich erhalten wir auch spezielle Tensoren 3. Ordnung, wenn wir Vierervektoren auf äußere Weise mit speziellen Tensoren 2. Ordnung multiplizieren. — Die äußere Multiplikation eines Vierervektors A_i mit einem symmetrischen Tensor 2. Ordnung \bar{B}_{kl} ergibt einen partiell symmetrischen Tensor 3. Ordnung

$$A_i \bar{B}_{kl}$$

vom Typus (16). Die Summe von 3 derartigen Tensoren bestimmt nach (28) einen vollständig symmetrischen Tensor und wollen wir diesen als äußeres vollständig symmetrisches Produkt eines Vierervektors und eines symmetrischen Tensors 2. Ordnung ansprechen:

$$(30) \quad \overline{A_i B_{kl}} = A_i \bar{B}_{kl} + A_k \bar{B}_{li} + A_l \bar{B}_{ik}.$$

Die äußere Multiplikation eines Vierervektors A_i und eines Antitensors 2. Ordnung B_{kl} führt auf einen partiell antisymmetrischen Tensor 3. Ordnung

$$A_i B_{kl}$$

vom Typus (17). Durch zyklische Vertauschung der Zeiger erhalten wir 3 Tensoren, deren Summe nach (29) einen Antitensor darstellt. Wir definieren dementsprechend als äußeres Antitensorprodukt eines Vierervektors und eines Antitensors 2. Ordnung die Bildung

$$(31) \quad \underline{A_i B_{kl}} = A_i B_{kl} + A_k B_{li} + A_l B_{ik}.$$

8. Spezielle Tensoren und Multiplikationen 4. Ordnung. —

Aus den 256 Bestimmungsgrößen eines Tensors 4. Ordnung lassen sich die Bestimmungsgrößen von 24 konjugierten Tensoren zusammenstellen, welche in sehr mannigfaltiger Weise zu speziellen Tensoren 4. Ordnung vereinigt werden können. Eine Auswahl der wichtigsten Bildungen ist in umstehender Tabelle (32) zusammengestellt.

Zu Post 7 der umstehenden Tabelle ist zu bemerken, daß der vollständig symmetrische Tensor 4. Ordnung \bar{A}_{iklm} aus dem allgemeinen Tensor A_{iklm} durch Addition der aus dem letzteren abgeleiteten 24 konjugierten Tensoren entsteht, d. h. es ist

$$(33) \quad \bar{A}_{iklm} = A_{iklm} + A_{ikml} + A_{ilmk} + A_{ilkm} + \dots$$

(24 Summanden entsprechend den Permutationen der Zeigerfolge i, k, l, m).

(32) Post	Bildung	Bezeichnung des Tensors	Eigenschaften der Bestimmungsgrößen (B.G.)	Anzahl der numer. ver- schied. B.G.
1	$A_{ik\bar{l}m} = A_{iklm} + A_{ikml}$	partiell symmetrisch	96 Paare gleiche B.G. 64 einzelstehende B.G.	160
2	$A_{ik\underline{l}m} = A_{iklm} - A_{ikml}$	partiell antisymmetr.	96 Paare numer. gleiche B.G. 64 verschwindende B.G.	96
3	$A_{i\bar{k}\bar{l}m} = A_{iklm} + A_{ikml}$ $+ A_{lkm} + A_{lkm}$ $+ A_{lmk} + A_{lmk}$	partiell symmetrisch	16 Grupp. zu je 6 gleich. B.G. 48 " " " 3 " " 16 einzelstehende B.G.	80
4	$A_{i\bar{k}\underline{l}m} = A_{iklm} - A_{ikml}$ $+ A_{lkm} - A_{lkm}$ $+ A_{lmk} - A_{lmk}$	partiell antisymmetr.	16 Grupp. zu je 6 numerisch gleichen B.G. 160 verschwindende B.G.	16
5	$A_{i\bar{k}\bar{l}m} + A_{i\bar{k}m\bar{l}}$ $= A_{ik\bar{l}m} + A_{k\bar{l}m}$	zweifach symmetrisch	36 Grupp. zu je 4 gleich. B.G. 48 Paare gleiche B.G. 16 einzelstehende B.G.	100
6	$A_{i\underline{k}\underline{l}m} - A_{i\underline{k}m\underline{l}}$ $= A_{ik\underline{l}m} - A_{k\underline{l}m}$	zweifach antisymmetr.	36 Grupp. zu je 4 numerisch. gleichen B.G. 112 verschwindende B.G.	36
7	$A_{i\bar{k}\bar{l}m} = \bar{A}_{iklm}$	vollständig symmetrisch	1 Gruppe zu 24 gleich. B.G. 12 Grupp. zu je 12 gleich. B.G. 12 " " " 4 " " 6 " " " 6 " " 4 einzelstehende B.G.	35
8	$A_{i\underline{k}\underline{l}m} = \underline{A}_{iklm}$	Antitensor	1 Gruppe zu 24 numerisch gleichen B.G. 232 verschwindende B.G.	1

Von den 256 Bestimmungsgrößen eines vollständig symmetrischen Tensors 4. Ordnung sind, wie bereits bemerkt, nur 35 verschieden.

Werden in der Entwicklung (33) die Tensorsymbole, deren Zeigerfolgen inbezug auf die Folge i, k, l, m der linken Seite ungerade sind, negativ genommen, so ergibt sich der Antitensor 4. Ordnung.

$$(34) \quad \underline{A}_{iklm} = A_{iklm} - A_{ikml} + A_{ilmk} - A_{ilkm} + \dots;$$

er hat nur 24 von Null verschiedene Bestimmungsgrößen, welche überdies numerisch gleich sind. Durch Bildung der

„Ergänzung“ (vgl. Abschnitt 12) läßt sich aus dem Antitensor 4. Ordnung ein Skalar ableiten.

Für die Kennzeichnung von Tensoren, welche von vornherein symmetrische bzw. antisymmetrische Eigenschaften besitzen, wollen wir an Stelle der Klammern wie früher einfache Striche verwenden bzw. Antitensoren durch fetten Druck ihrer Symbole (in der Schrift durch Unterstreichung) hervorheben.

Entsprechend den in der Tabelle (32) zusammengestellten Tensorbildungen können wir zunächst spezielle äußere Multiplikationen von vier Vierervektoren definieren, welche auf spezielle Tensoren 4. Ordnung führen; wir beschränken uns auf die zwei wichtigsten Beispiele.

a) Das äußere vollständig symmetrische Produkt von vier Vierervektoren ist die Bildung

$$(35) \quad \overline{A_i B_k C_l D_m} = A_i B_k C_l D_m + A_i B_k C_m D_l + A_i B_l C_m D_k + \dots$$

(entspricht Post 7 der Tabelle 32).

Diese Bildung kann nach symmetrischen Tensoren 3. bzw. 2. Ordnung entwickelt werden; es ist beispielsweise

$$(35a) \quad \overline{A_i B_k C_l D_m} = \overline{A_i B_k C_l} \overline{D_m} + \overline{A_k B_l C_m} \overline{D_i} + \overline{A_l B_m C_i} \overline{D_k} + \overline{A_m B_i C_k} \overline{D_l}$$

bzw.

$$(35b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{A_i B_k C_l D_m} = \overline{A_i B_k} \overline{C_l D_m} + \overline{A_i B_m} \overline{C_k D_l} + \overline{A_k B_l} \overline{C_i D_m} \\ \quad + \overline{A_k B_m} \overline{C_l D_i} + \overline{A_l B_i} \overline{C_k D_m} + \overline{A_l B_m} \overline{C_i D_k} \end{array} \right.$$

b) Der Post 8 der Tabelle (32) entspricht das Antitensorprodukt von vier Vierervektoren, welches sich auch in der Form

$$(36) \quad \underline{A_i B_k C_l D_m} = \begin{vmatrix} A_i & A_k & A_l & A_m \\ B_i & B_k & B_l & B_m \\ C_i & C_k & C_l & C_m \\ D_i & D_k & D_l & D_m \end{vmatrix}$$

darstellen läßt. — Die Entwicklung der Determinante in (36) nach Hauptminoren bzw. Minoren 2. Ordnung ergibt andere Darstellungsmöglichkeiten des genannten Antitensorprodukts; es ist z. B.

$$(36a) \quad \underline{A_i B_k C_l D_m} = \underline{A_i B_k C_l} \underline{D_m} + \underline{A_k B_l C_m} \underline{D_i} + \underline{A_l B_m C_i} \underline{D_k} + \underline{A_m B_i C_k} \underline{D_l},$$

wobei zu beachten ist, daß die Zeigerfolgen der rechten Seite in bezug auf die Folge i, k, l, m der linken Seite gerade sind.

Die Entwicklung der Determinante nach Minoren 2. Ordnung führt auf Beziehungen von der Form

$$(96b) \left\{ \begin{aligned} \underline{A_i B_k C_l D_m} &= \underline{A_i B_k C_l D_m} + \underline{A_i B_m C_k D_l} + \underline{A_k B_l C_i D_m} \\ &+ \underline{A_l B_m C_i D_k} + \underline{A_l B_l C_k D_i} + \underline{A_l B_m C_i D_k}, \end{aligned} \right.$$

wobei wieder die Zeigerfolgen auf der rechten Seite gerade sind.

Spezielle Tensoren 4. Ordnung lassen sich ferner durch multiplikative Verknüpfungen von Vierervektoren mit Tensoren 3. Ordnung oder von zwei Tensoren 2. Ordnung erhalten. Einige Beispiele sind in den folgenden Tabellen angeführt.

(37) Spezielle äußere Multiplikation eines Vierervektors und eines Tensors 3. Ordnung.

Post	Bildung	Bezeichnung der Multiplikation	Eigenschaften der Bestimmungs-Größen	Anzahl der numer. verschied. B.G.
1	$\underline{A_i B_k C_l D_m} = \underline{A_i B_k C_l D_m} + \underline{A_k B_l C_i D_m}$	partiell symmetrisch	wie Post 1 der Tab. (32)	160
2	$\underline{A_i B_k C_l D_m} = \underline{A_i B_k C_l D_m} - \underline{A_l B_k C_i D_m}$	partiell antisymmetr.	wie Post 2 der Tab. (32)	96
3	$\underline{A_i B_k C_l D_m} = \underline{A_i B_k C_l D_m} + \underline{A_l B_k C_i D_m} + \underline{A_l B_m C_k D_i} + \underline{A_m B_k C_l D_i} + \underline{A_m B_l C_k D_i}$	partiell symmetrisch	wie Post 3 der Tab. (32)	80
4	$\underline{A_i B_k C_l D_m} = \underline{A_i B_k C_l D_m} - \underline{A_l B_k C_i D_m} + \underline{A_k B_l C_i D_m} - \underline{A_m B_l C_k D_i} - \underline{A_m B_k C_l D_i}$	partiell antisymmetr.	wie Post 4 der Tab. (32)	16
5	$\underline{A_i B_k C_l D_m} = \underline{A_i B_k C_l D_m} = \underline{A_i B_k C_l D_m} + \underline{A_l B_k C_i D_m} + \underline{A_l B_m C_k D_i} + \underline{A_m B_k C_l D_i} + \underline{A_m B_l C_k D_i} + \dots$ (24 Summanden entspr. der Permutation der Zeigerfolge i, k, l, m) $= \underline{A_i B_k C_l D_m} + \underline{A_k B_l C_i D_m} + \underline{A_l B_m C_i D_k} + \underline{A_m B_l C_k D_i}$ [nach (19)]	vollständig symmetrisch	wie Post 7 der Tab. (32)	85
6	$\underline{A_i B_k C_l D_m} = \underline{A_i B_k C_l D_m} = \underline{A_i B_k C_l D_m} - \underline{A_l B_k C_i D_m} + \underline{A_k B_l C_i D_m} - \underline{A_m B_l C_k D_i} + \underline{A_m B_k C_l D_i} + \dots$ $= \underline{A_i B_k C_l D_m} + \underline{A_k B_l C_i D_m} + \underline{A_l B_m C_k D_i} + \underline{A_m B_l C_k D_i}$ [nach (20)]	Antitensor	wie Post 8 der Tab. (32)	1

(38) Spezielle Multiplikationen zweier Tensoren 2. Ordnung.

Post	Bildung	Bezeichnung der Multiplikation	Eigenschaften der Bestimmungsgrößen	Anzahl der numer. verschied. B.G.
1	$A_{ik} B_{lm} = A_{ik} B_{lm} + A_{ik} B_{lm}$	partiell symmetrisch	wie Post 1 der Tab. (32)	160
2	$A_{ik} B_{lm} = A_{ik} B_{lm} - A_{lm} B_{ik}$	partiell antisymmetr.	wie Post 2 der Tab. (32)	96
3	$A_{ik} B_{lm} = A_{ik} B_{lm} + A_{ik} B_{ml} + A_{il} B_{mk} + A_{il} B_{km} + A_{im} B_{kl} + A_{im} B_{lk}$	partiell symmetrisch	wie Post 3 der Tab. (32)	80
4	$A_{ik} B_{lm} = A_{ik} B_{lm} - A_{ik} B_{ml} + A_{il} B_{mk} - A_{il} B_{km} + A_{im} B_{kl} - A_{im} B_{lk}$	partiell antisymmetr.	wie Post 4 der Tab. (32)	16
5	$A_{ik} B_{lm} = \overline{A_{ik} B_{lm}}$ $= A_{ik} B_{lm} + A_{ik} B_{ml} + A_{il} B_{mk} + A_{il} B_{km}$ $+ \dots (24 \text{ Summ.})$ $= \overline{A_{ik} B_{lm}} + \overline{A_{ik} B_{ml}} + \overline{A_{il} B_{mk}} + \overline{A_{il} B_{km}}$ $+ \overline{A_{im} B_{kl}} + \overline{A_{im} B_{lk}}$	vollständig symmetrisch	wie Post 7 der Tab. (32)	35
6	$A_{ik} B_{lm} = \underline{A_{ik} B_{lm}}$ $= A_{ik} B_{lm} - A_{ik} B_{ml} + A_{il} B_{mk} - A_{il} B_{km}$ $+ \dots$ $= \underline{A_{ik} B_{lm}} + \underline{A_{im} B_{kl}} + \underline{A_{il} B_{mk}} + \underline{A_{il} B_{km}}$ $+ \underline{A_{im} B_{kl}} + \underline{A_{il} B_{mk}}$	Antitensor	wie Post 8 der Tab. (32)	1

Auch die äußere Multiplikation von Vierervektoren mit speziellen Tensoren 3. Ordnung sowie von zwei speziellen Tensoren 2. Ordnung ergibt spezielle Tensoren 4. Ordnung.

Beispiele: Die äußere Multiplikation eines Vierervektors mit einem vollständig symmetrischen Tensor 3. Ordnung

$$A_i \bar{B}_{klm}$$

führt auf einen partiell symmetrischen Tensor 4. Ordnung vom Typus Post 3 der Tab. (32) mit 80 verschiedenen Bestimmungsgrößen. Die Summe von 4 derartigen Tensoren bestimmt nach Post 5 der Tab. (37) einen vollständig symmetrischen Tensor 4. Ordnung, welche Bildung wir als äußeres vollständig symmetrisches Produkt eines Vierervektors und eines vollständig symmetrischen Tensors 3. Ordnung definieren wollen:

$$(39) \quad \overline{A_i \bar{B}_{klm}} = A_i \bar{B}_{klm} + A_k \bar{B}_{ilm} + A_l \bar{B}_{mik} + A_m \bar{B}_{lki}.$$

Das äußere Produkt eines Vierervektors und eines Antitensors 3. Ordnung

$$A_i B_{klm}$$

ist ein partiell antisymmetrischer Tensor 4. Ordnung vom Typus Post 4 der Tab. (32) mit 16 numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen. Die Summe von 4 solchen Tensoren ergibt nach Post 6 der Tab. (37) einen Antitensor 4. Ordnung; dementsprechend definieren wir als äußeres Antitensorprodukt eines Vierervektors und eines Antitensors 3. Ordnung die Bildung

$$(40) \quad \underline{A_i B_{klm}} = A_i B_{klm} + A_k B_{ilm} + A_l B_{mik} + A_m B_{lki}.$$

Die äußere Multiplikation von zwei symmetrischen Tensoren 2. Ordnung

$$\bar{A}_{ik} \bar{B}_{lm}$$

führt auf einen zweifach symmetrischen Tensor 4. Ordnung vom Typus Post 5 der Tab. (32), die äußere Multiplikation von zwei Antitensoren 2. Ordnung

$$A_{ik} B_{lm}$$

auf einen zweifach antisymmetrischen Tensor 4. Ordnung vom Typus Post 6 der Tab. (32).

Das äußere vollständig symmetrische Produkt zweier symmetrischer Tensoren 2. Ordnung definieren wir als die Bildung

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{A_{ik} \bar{B}_{lm}} &= \bar{A}_{ik} \bar{B}_{lm} + \bar{A}_{lm} \bar{B}_{ik} + \bar{A}_{kl} \bar{B}_{im} + \bar{A}_{km} \bar{B}_{li} \\ &\quad + \bar{A}_{li} \bar{B}_{km} + \bar{A}_{lm} \bar{B}_{ik}, \end{aligned} \right.$$

das äußere Antitensorprodukt zweier Antitensoren 2. Ordnung als

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} \underline{A_{ik} B_{lm}} &= A_{ik} B_{lm} + A_{lm} B_{ik} + A_{kl} B_{im} + A_{km} B_{li} \\ &\quad + A_{li} B_{km} + A_{lm} B_{ik}. \end{aligned} \right.$$

Nach den gleichen Gesichtspunkten lassen sich auch mehr oder weniger spezielle Tensoren höherer Ordnung bilden, deren Mannigfaltigkeit mit der Ordnung wächst. Antitensoren höherer als 4. Ordnung gibt es aber nicht.

Bemerkungen zu der Bezeichnungsweise. — Spezielle äußere Multiplikationen von Tensoren wurden durch Über- bzw.

Unterklammerung von Zeigern der beteiligten Tensorsymbole zum Ausdruck gebracht. Die Überklammerung einer Anzahl von Zeigern in einem Tensorausdruck hat für die Ausrechnung die Bedeutung, daß die Summe über alle Tensorausdrücke zu bilden ist, welche den Permutationen der überklammerten Zeigerfolge entsprechen [Beispiele vgl. Post 1, 3 und 5 der Tab. (37) und (38)]. Überklammerte Zeiger können beliebig vertauscht werden, z. B.

$$A_{ik} B_{lm} = A_{im} B_{kl}.$$

Derartige Bildungen führen auf partiell bzw. vollständig symmetrische Tensoren.

Bei der Ausrechnung von Tensorausdrücken mit unterklammerten Zeigern ($\leq 4!$) sind jene Permutationen, welche in bezug auf die gegebene unterklammerte Zeigerfolge ungerade sind, negativ zu nehmen [Beispiele: Post 2, 4 und 6 der Tab. (37) und (38)]. Die Vertauschung je zweier unterklammerter Zeiger ändert das Vorzeichen der Bildungen, z. B.

$$A_{ik} B_{lm} = -A_{ik} B_{ml} = A_{lk} B_{mi};$$

die Bestimmungsgrößen mit zwei gleichen unterklammerten Zeigern verschwinden. — Diese Bildungen ergeben partiell antisymmetrische Tensoren bzw. Antitensoren.

Multiplikative Verknüpfungen, welche auf vollständig symmetrische Tensoren führen, wurden durch Überklammerung der an ihrer Bildung beteiligten Tensorsymbole bezeichnet. Befinden sich unter der Klammer nur die Symbole von gewöhnlichen Tensoren, so ist die Überklammerung gleichbedeutend mit der Überklammerung sämtlicher ihrer Zeiger.

Beispiele:

$$\overline{A_i B_k} = A_i B_k, \quad \overline{A_i B_{kl}} = A_i B_{kl}, \quad \overline{A_{ik} B_{lm}} = (A_{ik} B_{lm}).$$

Die Bezeichnungsweise $(A_{ik} B_{lm})$ darf dabei nicht so aufgefaßt werden, als ob jedes der beiden Tensorsymbole für sich nach (6) entwickelt werden könnte; zur Vermeidung von Irrtümern ist die Bezeichnung durch Überklammerung der Tensorausdrücke vorzuziehen.

Die Überklammerung von Tensorausdrücken, welche symmetrische Tensoren enthalten, hat die in (30), (39) und (41) festgesetzte besondere Bedeutung. — Es könnte auch die früher angegebene Bedeutung beibehalten werden; doch treten

dann in den Entwicklungen derartiger Bildungen Zahlenfaktoren auf. Entwickeln wir z. B. die Bildung $\overline{A_i B_{kl}}$ [vgl. (28)] nach den Permutationen der überklammerten Zeigerfolge, so erhalten wir 6 Summanden

$$A_i \bar{B}_{kl} + A_i \bar{B}_{lk} + A_k \bar{B}_{li} + A_k \bar{B}_{il} + A_l \bar{B}_{ik} + A_l \bar{B}_{ki},$$

von denen je zwei wegen (6) gleich sind; es wäre daher

$$\overline{A_i B_{kl}} = 2(A_i \bar{B}_{kl} + A_k \bar{B}_{li} + A_l \bar{B}_{ik}).$$

Entsprechend würde für die Bildungen (39) und (41) gelten:

$$\overline{A_i B_{klm}} = 6(A_i \bar{B}_{klm} + \bar{A}_k \bar{B}_{ilm} + A_l \bar{B}_{mik} + A_m \bar{B}_{ikl})$$

bzw.

$$\overline{\bar{A}_{ik} \bar{B}_{lm}} = 4(\bar{A}_{ik} \bar{B}_{lm} + \bar{A}_{im} \bar{B}_{kl} + \bar{A}_{kl} \bar{B}_{im} + \bar{A}_{km} \bar{B}_{li} + \bar{A}_{li} \bar{B}_{km} + \bar{A}_{lm} \bar{B}_{ik}).$$

Die Antitensorprodukte wurden durch Unterklammerung der Tensorsymbole bezeichnet, was bei gewöhnlichen Tensoren der Unterklammerung aller Zeiger ($\leq 4!$) entspricht.

Beispiele:

$$\underline{A_i B_k} = A_i B_k, \quad \underline{A_i B_{kl}} = A_i B_{kl}, \quad \underline{A_{ik} B_{lm}} = (A_{ik} B_{lm}).$$

Die besondere Bedeutung der Unterklammerung von Tensorausdrücken, welche Antitensoren enthalten, ist in (31), (40) und (42) festgesetzt. — Wird die für gewöhnliche Tensoren geltende Bedeutung der Unterklammerung beibehalten, so treten in den Entwicklungen derartiger Bildungen wieder Zahlenfaktoren auf wie in den Beispielen:

$$\begin{aligned} \underline{A_i B_{kl}} &= 2(A_i B_{kl} + A_k B_{li} + A_l B_{ik}), \\ \underline{A_i B_{klm}} &= 6(A_i B_{klm} + A_k B_{ilm} + A_l B_{mik} + A_m B_{ikl}), \\ \underline{A_{ik} B_{lm}} &= 4(A_{ik} B_{lm} + A_{im} B_{kl} + A_{kl} B_{im} + A_{km} B_{li} \\ &\quad + A_{li} B_{km} + A_{lm} B_{ik}). \end{aligned}$$

Bei der für gewöhnliche Tensoren geltenden Bedeutung der Über- bzw. Unterklammerung würden ferner überklammerte Tensorausdrücke, welche antisymmetrische Tensoren, und unterklammerte, welche symmetrische Tensoren enthalten, Null ergeben.

9. *Verjüngung*. — Eine wichtige invariante Bildung ist die „Verjüngung“ (Bezeichnung nach Einstein) von Tensoren höherer als 2. Ordnung, welche darin besteht, daß in den Tensorsymbolen Paare von Zeigern gleichgesetzt werden, über welche dann nach den früheren Festsetzungen zu summieren ist. Durch die Verjüngung wird die Ordnung des betroffenen Tensors um zwei oder Vielfache von zwei erniedrigt.

Beispiele: Die Verjüngung eines Tensors 2. Ordnung A_{ik} ist der Skalar

$$(43) \quad A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}.$$

Daß diese Bildung invariant ist, ergibt sich leicht aus ihrem Transformationsgesetz

$$A_{ii} = p_{ir} p_{is} A_{rs}' \text{ [nach (3a)] ,}$$

wenn wir beachten, daß die Elemente der orthogonalen Transformationsdeterminante $p = 1$ ihren Hauptminoren gleich sind. Die Entwicklung

$$p_{ir} p_{is} = p_{1r} p_{1s} + p_{2r} p_{2s} + p_{3r} p_{3s} + p_{4r} p_{4s}$$

entspricht daher der Summe aus den Produkten der Elemente einer Kolonne r mit den Hauptminoren einer Kolonne s der Transformationsdeterminante, und diese Summe verschwindet für $r \neq s$, während für $r = s$ der Wert der Determinante, also Eins, resultiert, so daß

$$(44) \quad A_{ii} = A_{rr}'.$$

Bei der von Einstein für die a. R. T. verwendeten Tensoranalysis ist die Verjüngung von kontravarianten bzw. kovarianten Tensoren *keine* Invariante; dort lassen sich nur gemischte Tensoren verjüngen, welche durch äußere Multiplikation von kontravarianten mit kovarianten Tensoren erhalten werden können.

Die Verjüngungen eines Tensors 3. Ordnung A_{ikl} sind die Vierervektoren

$$A_{iil}, A_{ili}, A_{lii},$$

welche im allgemeinen verschieden sind, nur bei symmetrischen Tensoren sind sie gleich.

Die Verjüngungen eines Tensors 4. Ordnung führen auf Tensoren 2. Ordnung, aus welchen durch nochmalige Verjüngung Skalare abgeleitet werden können.

Die Verjüngungen von Antitensoren verschwinden.

Aus den Bestimmungsgrößen eines Tensors 2. Ordnung lassen sich in Analogie zu den im R_3 gebräuchlichen Bildungen noch weitere Skalare ableiten; die Bildung (45) wäre darnach als „1. Skalar“ zu bezeichnen.

Der 2. Skalar ist definiert durch

$$(45) \quad S_{(2)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_{ii} & A_{ik} \\ A_{ki} & A_{kk} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (A_{ii} A_{kk} - A_{ik} A_{ki}),$$

wobei über die 16 Variationen der Summenzeiger i, k zu summieren ist.

Der 3. Skalar ist die Bildung

$$(46) \quad S_{(3)} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} A_{ii} & A_{ik} & A_{il} \\ A_{ki} & A_{kk} & A_{kl} \\ A_{li} & A_{lk} & A_{ll} \end{vmatrix};$$

schließlich ist der 4. Skalar die Determinante der Matrix der Bestimmungsgrößen

$$(47) \quad S_{(4)} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}.$$

Der 1. und 3. Skalar von Antitensoren 2. Ordnung verschwinden.

10. Innere (gemischte) Multiplikation. — Eine zweite nicht minder wichtige multiplikative Verknüpfung von Tensoren ist die „innere“ bzw. „gemischte“ Multiplikation, welche in der Kombination der äußeren Multiplikation mit der Verjüngung besteht.

Beispiele: a) Das innere Produkt zweier Vierervektoren A_i und B_k ist der Skalar (Tensor nullter Ordnung)

$$(48) \quad A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4.$$

Die Invarianz dieser Bildung folgt aus der Invarianz der Verjüngung eines Tensors 2. Ordnung [vgl. (44)]. — In der a. R. T. ist das innere Produkt zweier gleichartiger Tensoren *keine* Invariante und kommt dort diese multiplikative Verknüpfung nur für Tensoren verschiedener Art in Frage.

b) Die inneren Produkte des Vierervektors A_i und des Tensors 2. Ordnung B_{ki} sind die Vierervektoren

$$(49) \quad A_i B_{ki} = A_1 B_{k1} + A_2 B_{k2} + A_3 B_{k3} + A_4 B_{k4}$$

bzw.

$$(49a) \quad A_i B_{ik} = A_1 B_{1k} + A_2 B_{2k} + A_3 B_{3k} + A_4 B_{4k},$$

welche im allgemeinen verschieden sind. Wenn B_{ki} symmetrisch ist, sind die beiden Produkte gleich. Ist B_{ki} ein Antitensor, so gilt wegen (7)

$$(50) \quad A_i B_{ki} = -A_i B_{ik};$$

die Summierung über i ergibt hier nur 3 Summanden.

c) Die inneren Produkte des Vierervektors A_i und des Tensors 3. Ordnung B_{kim} sind die Tensoren 2. Ordnung

$$(51) \quad A_i B_{kii}, A_i B_{kii}, A_i B_{ikl};$$

für einen vollständig symmetrischen Tensor 3. Ordnung sind sie gleich; für einen Antitensor gilt

$$(52) \quad A_i B_{kii} = -A_i B_{kii} = A_i B_{ikl}.$$

Die Bildung (52) führt übrigens, wie leicht einzusehen ist, auf einen Antitensor 2. Ordnung.

d) Die gemischten Produkte zweier Tensoren 2. Ordnung A_{ik} und B_{ilm} sind die Tensoren 2. Ordnung

$$(53) \quad A_{ki} B_{li}, A_{ki} B_{li}, A_{ik} B_{li}, A_{ik} B_{li};$$

diese multiplikativen Verknüpfungen sind als „gemischt“ zu bezeichnen, da sie hinsichtlich der Zeiger k, l „äußere“, hinsichtlich der Zeiger i „innere“ Multiplikationen darstellen. — Wenn es sich um symmetrische Tensoren handelt, sind die 4 Produkte gleich; für Antitensoren gilt

$$(54) \quad A_{ki} B_{li} = -A_{ki} B_{li} = -A_{ik} B_{li} = A_{ik} B_{li}.$$

Zweimaligen Verjüngungen entsprechen beispielsweise die inneren Produkte

$$A_{ik} B_{ik} \text{ (Skalar)}, A_{ki} B_{ikl} \text{ (Vierervektor)},$$

deren Entwicklung nach den Summenzeigern im allgemeinen 16 Summanden ergibt.

Bei den inneren (gemischten) multiplikativen Verknüpfungen treten, wie aus den vorstehenden Beispielen zu ersehen ist, Paare von gleichen Zeigern (Summenzeiger) auf; die Ordnung des Produkts bestimmt sich hier durch die nach Absonderung der Summenzeigerpaare übrigbleibenden verschiedenen Zeiger, welche aus diesem Grunde „Ordnungszeiger“ genannt werden sollen.

11. Die inneren (gemischten) Multiplikationen von Tensoren lassen sich noch in der Weise spezialisieren, daß nach den Ausführungen der Abschnitte 5—8 durch Zusammenfassung konjugierter Produkte symmetrische bzw. antisymmetrische Tensoren gebildet werden. So entstehen aus (51) die „inneren symmetrischen Produkte“

$$(55) \quad \begin{cases} A_i B_{\bar{k}\bar{l}i} = \overline{A_i B_{kll}} = A_i B_{kll} + A_i B_{lki}, \\ A_i B_{\bar{k}i\bar{l}} = \overline{A_i B_{kii}} = A_i B_{kii} + A_i B_{lik}, \\ A_i B_{\bar{k}\bar{l}\bar{i}} = \overline{A_i B_{ikl}} = A_i B_{ikl} + A_i B_{ilk}. \end{cases}$$

Die „inneren Antitensorprodukte“ eines Vierervektors A_i und eines Tensors 3. Ordnung B_{klm} sind andererseits die Bildungen

$$(56) \quad \begin{cases} A_i B_{\bar{k}\bar{l}i} = \overline{A_i B_{kll}} = A_i B_{kll} - A_i B_{lki}, \\ A_i B_{\bar{k}i\bar{l}} = \overline{A_i B_{kii}} = A_i B_{kii} - A_i B_{lik}, \\ A_i B_{\bar{k}\bar{l}\bar{i}} = \overline{A_i B_{ikl}} = A_i B_{ikl} - A_i B_{ilk}. \end{cases}$$

Die Bedeutung der Über- bzw. Unterklammerung bezieht sich hier selbstverständlich nur auf die Permutationen der Ordnungszeiger.

Beispiele von speziellen gemischten Produkten sind die Bildungen:

$$(57) \quad A_{\bar{k}i} B_{\bar{l}i} = \overline{A_{ki} B_{li}} = A_{ki} B_{li} + A_{li} B_{ki}, \quad \left. \begin{array}{l} (58) \quad \overline{A_{\bar{k}i} B_{\bar{l}i}} = \overline{A_{ki} B_{li}} = \overline{A_{ki} B_{li}} + \overline{A_{li} B_{ki}} \\ \text{bzw.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(gemischte symme-} \\ \text{trische Produkte)} \end{array}$$

$$(59) \quad A_{\bar{k}i} B_{\bar{l}i} = \overline{A_{ki} B_{li}} = A_{ki} B_{li} - A_{li} B_{ki}, \quad \left. \begin{array}{l} (60) \quad \overline{A_{\bar{k}i} B_{\bar{l}i}} = \overline{A_{ki} B_{li}} = A_{ki} B_{li} - A_{li} B_{ki} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(gemischte Anti-} \\ \text{tensorprodukte).} \end{array}$$

$$(60) \quad \overline{A_{\bar{k}i} B_{\bar{l}i}} = \overline{A_{ki} B_{li}} = A_{ki} B_{li} - A_{li} B_{ki}$$

Die Bildung (60), als Sechservektor aufgefaßt, entspricht dem Laueschen Vektorprodukt zweier Sechservektoren.¹⁾

12. Der Ergänzungsbegriff. — Wie bereits bemerkt [vgl. Abschnitt 8, Gl. (84) bzw. Abschnitt 6, Gl. (20)], läßt sich aus einem Antitensor 4. Ordnung ein Skalar und aus einem Antitensor 3. Ordnung ein Vierervektor ableiten, welche letztere Größen als „Ergänzungen“ der genannten Antitensoren be-

1) M. v. Laue, Das Relativitätsprinzip. Vieweg, Braunschweig 1913. p. 78 u. 79.

zeichnet werden. Diese Bildungen werden allgemein nach Großmann¹⁾ mit Hilfe eines Antitensors 4. Ordnung

$$I_{iklm}$$

erhalten, dessen von Null verschiedene Bestimmungsgrößen gleich $+1$ (-1) sind, wenn die betreffende Zeigerfolge i, k, l, m bezüglich 1, 2, 3, 4 eine gerade (ungerade) Permutation darstellt.

Als Ergänzung A^* eines Antitensors 4. Ordnung A_{iklm} definieren wir nun das innere Produkt

$$(61) \quad A^* = \frac{1}{24} I_{iklm} A_{iklm};$$

die Ausrechnung ergibt

$$(61a) \quad A^* = A_{1234}.$$

Die Ergänzung H_i^* eines Antitensors 3. Ordnung H_{iklm} ist die Bildung

$$(62) \quad H_i^* = \frac{1}{6} I_{iklm} H_{iklm}.$$

Für $i = 1$ ergibt die Ausrechnung

$$H_1^* = \frac{1}{6} (I_{1234} H_{234} + I_{1243} H_{243} + I_{1342} H_{342} + I_{1324} H_{324} + I_{1423} H_{423} + I_{1432} H_{432});$$

alle anderen Variationen der Summenzeiger k, l, m verschwinden wegen des Antitensorcharakters von I_{iklm} . Wenn wir für I_{1234}, I_{1243} usw. die Werte ± 1 nach der früheren Angabe einsetzen, erhalten wir

$$H_1^* = \frac{1}{6} (H_{234} - H_{243} + H_{342} - H_{324} + H_{423} - H_{432});$$

da

$$H_{234} = -H_{243} = H_{342} = -H_{324} = H_{423} = -H_{432},$$

wird schließlich

$$H_1^* = H_{234} (= -H_{243} = H_{342} = \text{usw.}).$$

Auf diese Weise ergibt sich die folgende Zusammenstellung der Bestimmungsgrößen der Ergänzung H_i^* :

$$(62a) \quad \begin{cases} H_1^* = H_{234}, & H_3^* = H_{412}, \\ H_2^* = H_{143}, & H_4^* = H_{321}. \end{cases}$$

In ähnlicher Weise läßt sich mit Hilfe des Antitensors I_{iklm} auch die Ergänzung eines Antitensors 2. Ordnung

1). Entwurf einer verallgemeinerten R. T. B. G. Teubner 1913.
II. Mathem. Teil von M. Graßmann. p. 33 u. 34.

sowie die Ergänzungen eines Vierervektors und eines Skalars definieren. — Die Ergänzung eines Antitensors 2. Ordnung M_{lm} ist der Antitensor 2. Ordnung

$$(63) \quad M_{ik}^* = \frac{1}{2} I_{iklm} M_{lm};$$

für M_{23}^* ergibt die Ausrechnung beispielsweise

$$M_{23}^* = \frac{1}{2} (I_{2314} M_{14} + I_{2341} M_{41}) = \frac{1}{2} (M_{14} - M_{41}) = M_{14}.$$

Zusammenstellung:

$$(63a) \quad \begin{cases} M_{23}^* = -M_{32}^* = M_{14} = -M_{41}, \\ M_{31}^* = -M_{13}^* = M_{24} = -M_{42}, \\ M_{12}^* = -M_{21}^* = M_{34} = -M_{43}, \\ M_{14}^* = -M_{41}^* = M_{23} = -M_{32}, \\ M_{24}^* = -M_{42}^* = M_{31} = -M_{13}, \\ M_{34}^* = -M_{43}^* = M_{12} = -M_{21}. \end{cases}$$

Die Ergänzung des Vierervektors A_m ist der Antitensor 3. Ordnung

$$(64) \quad A_{ikl}^* = I_{iklm} A_m;$$

die Ausrechnung ergibt

$$(64a) \quad \begin{cases} -A_{234}^* = A_{243}^* = -A_{342}^* = A_{324}^* = -A_{423}^* = A_{432}^* = A_1, \\ -A_{143}^* = A_{134}^* = -A_{431}^* = A_{413}^* = -A_{314}^* = A_{341}^* = A_2, \\ -A_{412}^* = A_{421}^* = -A_{124}^* = A_{142}^* = -A_{241}^* = A_{214}^* = A_3, \\ -A_{321}^* = A_{312}^* = -A_{213}^* = A_{231}^* = -A_{132}^* = A_{123}^* = A_4. \end{cases}$$

Schließlich ist die Ergänzung eines Skalars A der Antitensor 4. Ordnung

$$(65) \quad A_{iklm}^* = I_{iklm} A.$$

Mit Hilfe des Ergänzungsbegriffes lassen sich äußere multiplikative Verknüpfungen von Tensoren mit inneren (gemischten) Multiplikationen in Zusammenhang bringen. In dieser Beziehung spielt der Ergänzungsbegriff in der Graßmannschen Ausdehnungslehre eine große Rolle. Wir wollen hier nur ein Beispiel anführen.

Wird das äußere Antitensorprodukt dreier Vierervektoren

$$\Omega_{klm} = \underline{Y_k E_l H_m} = Y_k E_l H_m - Y_k E_m H_l + Y_l E_m H_k - Y_l E_k H_m + Y_m E_k H_l - Y_m E_l H_k,$$

beiderseits mit $\frac{1}{6} I_{iklm}$ multipliziert, so erhalten wir auf der linken Seite nach (62) die Ergänzung Ω_i^* von Ω_{iklm} . Die einzelnen Glieder der Entwicklung auf der rechten Seite ergeben mit Rücksicht auf (64)

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} Y_k E_l I_{iklm} H_m &= \frac{1}{6} Y_k E_l H_{ikl}^*, \\ -\frac{1}{6} Y_k E_m I_{iklm} H_l &= \frac{1}{6} Y_k E_m H_{ikm}^*, \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind aber alle gleich, da sie sich nur durch die beliebig vertauschbaren Summenzeiger unterscheiden: es ist also

$$(66) \quad \Omega_i^* = Y_k E_l H_{ikl}^*$$

oder

$$\frac{1}{6} I_{iklm} Y_k E_l H_m = Y_k E_l H_{ikl}^*,$$

d. h. die Ergänzung des äußeren Antitensorprodukts $\underline{Y_k E_l H_m}$ ist das gemischte Produkt $Y_k E_l H_{ikl}^*$.

Ein anderer Weg für die Bildung dieser Ergänzung besteht darin, daß das äußere Antitensorprodukt zunächst nach (25) entwickelt wird:

$$\begin{aligned} \Omega_{iklm} &= Y_k \underline{E_l H_m} + Y_l \underline{E_m H_k} + Y_m \underline{E_k H_l} \\ &= Y_k S_{lm} + Y_l S_{mk} + Y_m S_{kl} \quad (\underline{E_l H_m} = S_{lm} \text{ gesetzt}). \end{aligned}$$

Wenn wir wieder beiderseits mit $\frac{1}{6} I_{iklm}$ multiplizieren, erhalten wir links Ω_i^* ; das erste Glied der rechten Seite ergibt mit Berücksichtigung von (63)

$$\frac{1}{6} Y_k I_{iklm} S_{lm} = \frac{1}{6} Y_k S_{ik}^*.$$

Die beiden anderen Glieder auf der rechten Seite liefern gleichbedeutende Ausdrücke, so daß

$$(67) \quad \Omega_i^* = Y_k S_{ik}^*,$$

oder

$$(67a) \quad \frac{1}{6} I_{iklm} \underline{Y_k E_l H_m} = Y_k S_{ik}^*.$$

Die Ergänzung des äußeren Antitensorprodukts $\underline{Y_k E_l H_m}$ ist das innere Produkt $Y_k S_{ik}^*$, wobei nach (63)

$$S_{ik}^* = \frac{1}{6} I_{iklm} \underline{E_l H_m}.$$

In der allgemeinen Tensoranalysis spielt der Ergänzungsbegriff meiner Ansicht nach keine so große Rolle; er kommt

jedoch in Frage, wenn es sich darum handelt, die Einführung von Antitensoren 3. Ordnung zu vermeiden.

13. In den Abschnitten 5—8 wurde die Bildung spezieller Tensoren durch Addition und Subtraktion der Bestimmungsgrößen konjugierter Tensoren behandelt, wobei die Ordnung unverändert blieb. Es lassen sich nun auch mit Hilfe von Determinantenbildungen aus den Bestimmungsgrößen von Tensoren 2. und höherer Ordnung die Bestimmungsgrößen von speziellen Tensoren ableiten, deren Ordnung verschieden sein kann.

Betrachten wir etwa einen Tensor 2. Ordnung mit den 16 Bestimmungsgrößen A_{ik} , welche in der Matrix

$$\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{array}$$

angeordnet sind. Die Determinante der Matrix werde mit A bezeichnet. Die Bildung der Unterdeterminanten von A (inkl. Vorzeichen) soll durch die Schreibweise

$$A_{(i),(r)}, A_{(ik),(rs)}, A_{(ikl),(rst)}$$

angedeutet werden, wobei die eingeklammerten Zeiger vor dem Beistrich die Zeilen, die Zeiger hinter dem Beistrich die Kolonnen angeben, welche in A zu streichen sind, um die Unterdeterminanten der verschiedenen Ordnungen zu erhalten. In den durch den Beistrich getrennten Zeigergruppen können darnach keine gleichen Zeiger auftreten.

Was das Vorzeichen der Unterdeterminanten 3. Ordnung $A_{(i),(r)}$ anlangt, so sind die nach Streichung der i ten Zeile und k ten Kolonne in A übrigbleibenden Determinanten mit $(-1)^{i+k}$ zu multiplizieren. Das Vorzeichen der Unterdeterminanten 2. und 1. Ordnung wird in der Weise bestimmt, daß zunächst die Zeigerfolgen (ik) und (rs) bzw. (ikl) und (rst) mit Berücksichtigung der dabei auftretenden Vorzeichenwechsel (die Vertauschung je zweier Zeiger der durch den Beistrich getrennten Zeigergruppen ändert das Vorzeichen der Unterdeterminanten) der natürlichen Zahlenfolge entsprechend geordnet werden. Die nach Streichung der durch die geordneten Zeigerfolgen angegebenen Zeilen und Kolonnen

in A übrigbleibenden Determinanten sind dann mit

$$(-1)^{i+k+r+s}$$

bzw.

$$(-1)^{i+k+l+r+s+t}$$

zu multiplizieren.

Die nach vorstehendem aus der Determinante A der Bestimmungsgrößen eines Tensors 2. Ordnung A_{ik} abgeleiteten Unterdeterminanten können als Bestimmungsgrößen neuer Tensoren angesehen werden, da sie sich bei Transformationen des Bezugssystems wie solche verhalten. Wir erhalten auf diese Weise folgende Bildungen:

1. Einen Skalar (Tensor nullter Ordnung) in der Determinante A der Bestimmungsgrößen [4. Skalar des Tensors A_{ik} ; vgl. (47)].

2. Einen Tensor 2. Ordnung

$$A_{(i), (r)}$$

dessen Bestimmungsgrößen durch die Unterdeterminanten 3. Ordnung von A gebildet werden. Es läßt sich leicht zeigen, daß $A_{(i), (r)}$ symmetrisch (antisymmetrisch) ist, wenn es der Ausgangstensor war. Zwischen den vier Skalaren der Tensoren $A_{(i), (r)}$ und des Ausgangstensors A_{ik} bestehen ferner gewisse Beziehungen, auf welche hier nicht näher eingegangen werden soll.

3. Ein Tensor 4. Ordnung

$$A_{(ik), (rs)}$$

aus den Unterdeterminanten 2. Ordnung von A ; dieser Tensor ist zweifach antisymmetrisch, da die Vertauschung der Zeiger ik bzw. rs das Vorzeichen der Bestimmungsgrößen ändert und jene Bestimmungsgrößen, welche gleiche Zeiger vor oder nach dem Beistrich aufweisen, verschwinden. Er besitzt 144 von Null verschiedene Bestimmungsgrößen, von denen aber nur 36 numerisch verschieden sind.

4. Ein Tensor 6. Ordnung

$$A_{(ikl), (rst)}$$

aus den Unterdeterminanten 1. Ordnung, welche auf die Elemente von A zurückführen; dieser Tensor ist gleichfalls zweifach antisymmetrisch (nach den Zeigerfolgen ikl bzw. rst) und besitzt 576 von Null verschiedene Bestimmungsgrößen, von denen aber nur 16 numerisch verschieden sind.

Im folgenden soll eine zweite Gruppe von Tensorbestimmungsgrößen aus den Unterdeterminanten von A abgeleitet werden. — Wir stellen zunächst aus den Elementen, in welchen die Zeilen k, l, m , die Kolonnen s, t, u der Determinante A schneiden, die Determinanten

$$A_{klm,stu} = \begin{vmatrix} A_{ks} & A_{kt} & A_{ku} \\ A_{ls} & A_{lt} & A_{lu} \\ A_{ms} & A_{mt} & A_{mu} \end{vmatrix}$$

zusammen. Was das Vorzeichen anlangt, so sollen jene, deren beide Zeigerfolgen zusammen eine gerade (ungerade) Anzahl von Inversionen aufweisen, mit positiven (negativen) Vorzeichen genommen werden. Diese Determinanten können als Bestimmungsgrößen eines zweifach antisymmetrischen Tensors 6. Ordnung angesehen werden, welcher 576 von Null verschiedene Bestimmungsgrößen besitzt, von denen aber nur 16 numerisch verschieden sind. Um den Tensorcharakter dieser Bildungen zu erweisen, setzen wir in der vorstehenden Determinante nach (8a) für die Elemente

$$A_{ks} = p_{kf} p_{so} A'_{fo},$$

$$A_{kt} = p_{kf} p_{tp} A'_{fp}$$

usw.

und erhalten

$$(68) \quad \begin{vmatrix} A_{ks} & A_{kt} & A_{ku} \\ A_{ls} & A_{lt} & A_{lu} \\ A_{ms} & A_{mt} & A_{mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{kf} p_{so} A'_{fo}, & p_{kf} p_{tp} A'_{fp}, & p_{kf} p_{uq} A'_{fq} \\ p_{lg} p_{so} A'_{go}, & p_{lg} p_{tp} A'_{gp}, & p_{lg} p_{uq} A'_{gq} \\ p_{mh} p_{so} A'_{ho}, & p_{mh} p_{tp} A'_{hp}, & p_{mh} p_{uq} A'_{hq} \end{vmatrix} \\ = p_{kf} p_{lg} p_{mh} p_{so} p_{tp} p_{uq} \begin{vmatrix} A'_{fo} & A'_{fp} & A'_{fq} \\ A'_{go} & A'_{gp} & A'_{gq} \\ A'_{ho} & A'_{hp} & A'_{hq} \end{vmatrix}.$$

Die 16 numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen des Tensors 6. Ordnung $A_{klm,stu}$ stimmen mit jenen des Tensors 2. Ordnung $A_{(i),(r)}$ überein. Eine ähnliche Beziehung haben wir im Abschnitt 12 [Gleichung (62)] zwischen den vier numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen eines Antitensors 3. Ordnung und den Bestimmungsgrößen seiner „Ergänzung“ kennen gelernt. Da wir es hier mit einem zweifach antisymmetrischen Tensor zu tun haben, ist die Beziehung (62) wie folgt zu erweitern:

$$(69) \quad A_{(i), (r)} = \frac{1}{36} I_{iklm} I_{rstu} A_{klm, stu}.$$

Der Tensor $A_{(i), (r)}$ kann daher auch als „Ergänzung“ des Tensors $A_{klm, stu}$ angesprochen werden.

Desgleichen bilden die Determinanten

$$A_{lm, tu} = \begin{vmatrix} A_{lt} & A_{lu} \\ A_{mt} & A_{mu} \end{vmatrix}$$

der Elemente, in welchen die lte und mte Zeile die tte und ute Kolonne von A schneiden, die Bestimmungsgrößen eines zweifach antisymmetrischen Tensors 4. Ordnung mit 144 von Null verschiedenen Bestimmungsgrößen, von denen aber nur 36 numerisch verschieden sind. Zwischen diesem Tensor und $A_{(ik), (rs)}$ besteht die Beziehung

$$A_{(ik), (rs)} = \frac{1}{4} I_{iklm} I_{rstu} A_{lm, tu}.$$

Schließlich ist

$$A_{m, u} = A_{mu}$$

mit dem Ausgangstensor identisch und es gilt

$$\begin{aligned} A_{(ikl), (rst)} &= I_{iklm} I_{rstu} A_{m, u} \\ &= I_{iklm} I_{rstu} A_{mu}. \end{aligned}$$

Durch die letzte Gleichung wird die „Ergänzung“ eines Tensors 2. Ordnung definiert.

Auch aus den Bestimmungsgrößen von Tensoren 3. und höherer Ordnung lassen sich durch Determinantenbildungen die Bestimmungsgrößen neuer Tensoren ableiten, welche vorläufig wohl nur invariantentheoretisches Interesse besitzen.

14. Differentielle Operationen. — Für die Ausführung differentieller Operationen empfiehlt sich die Einführung des Vierervektors ∇_i (Nabla) mit den Bestimmungsgrößen

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial ct} = -\frac{i \partial}{c \partial t}.$$

Die äußere Multiplikation von ∇_i mit einem Vierervektor Φ_k führt auf einen Differentialtensor 2. Ordnung

$$\nabla_i \Phi_k,$$

welcher in Anlehnung an Einstein als „Erweiterung“ des Vierervektors bezeichnet werden könnte.

Die innere Multiplikation von ∇_i und A_k ergibt den Skalar

$$\nabla_i A_i,$$

die „Divergenz“ des Vierervektors.

Ich möchte mir an dieser Stelle den Vorschlag erlauben, die äußere Multiplikation von ∇_i mit einem Tensor beliebiger Ordnung als seine „differentielle Erhöhung“ oder kurz „Erhöhung“, die innere Multiplikation von ∇_i mit einem Tensor als seine „Erniedrigung“ zu bezeichnen, da im ersten Falle das resultierende Tensorgebilde von höherer, im zweiten Falle von niedrigerer Ordnung ist als der beteiligte Tensor.

Von der großen Anzahl differentieller Bildungen wollen wir hier nur einige Beispiele anführen:

Die Erhöhung eines Skalars (Tensor nullter Ordnung) A ist der Vierervektor $\nabla_i A$,

welchen Sommerfeld¹⁾ als Gradient des Skalars bezeichnet.

Die „antitensorische Erhöhung“ eines Vierervektors Φ_k ist der Antitensor 2. Ordnung [nach (12) gebildet]

$$(70) \quad \nabla_i \Phi_k = \nabla_i \Phi_k - \nabla_k \Phi_i,$$

welcher, als Sechservektor (Vektor 2. Art) aufgefaßt, der Sommerfeldschen Rotation (l. c. p. 654) entspricht.

Die antitensorische Erhöhung eines Antitensors 2. Ordnung ist der nach (31) gebildete Antitensor 3. Ordnung

$$(71) \quad \nabla_i M_{kl} = \nabla_i M_{kl} + \nabla_k M_{li} + \nabla_l M_{ik};$$

die Erniedrigung eines Antitensors 2. Ordnung ist der Vierervektor

$$(72) \quad \nabla_i M_{ki} = - \nabla_i M_{ik},$$

welchen Sommerfeld (l. c. p. 651) als Vektordivergenz bezeichnet.

Das äußere Produkt

$$(73) \quad \nabla_i \nabla_k = \square_{ik}$$

können wir als Nablatensor 2. Ordnung ansprechen; das innere Produkt

$$(74) \quad \nabla_i \nabla_i = \square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t^2}$$

entspricht dem Operator Δ im R_3 .

15. Zusammenfassung. — In den vorhergehenden Abschnitten wurden die wichtigsten Tensorbildungen und ihre multiplikativen Verknüpfungen behandelt, wobei die „speziellen“

1) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie II. Ann. d. Phys. 33. p. 653. 1900.

Tensoren eine besondere Berücksichtigung fanden; unter dieser Bezeichnung sind ganz allgemein Tensoren zu verstehen, deren Bestimmungsgrößen besondere Eigenschaften besitzen. Diese Tensorbildungen weisen hinsichtlich der Anzahl ihrer numerisch gleichen bzw. verschwindenden Bestimmungsgrößen große Verschiedenheiten auf; trotzdem lassen sie sich in der allgemeinen Tensoranalysis wie gewöhnliche Tensoren ihrer Ordnung behandeln.

Die multiplikativen Verknüpfungen zerfallen in zwei Hauptgruppen: äußere und innere (gemischte) Multiplikationen. Die äußeren Multiplikationen von Tensoren sind in der Schreibweise daran zu erkennen, daß sämtliche Zeiger der vorkommenden Tensorsymbole verschieden sind; die Ordnung des Produkts wird durch die Anzahl der verschiedenen Zeiger bestimmt. — Treten dagegen Paare von gleichen Zeigern (Summenzeiger) auf, so ist die multiplikative Verknüpfung im allgemeinen eine gemischte. Die Ordnung des Produkts bestimmt sich durch die nach Absonderung der Summenzeigerpaare übrigbleibenden verschiedenen Zeiger (Ordnungszeiger).

Beispiele:

In der Bildung

$$(\alpha) \quad Y_b M_{bc} Y_c V_{cv}$$

treten 2 Paare von Summenzeigern (b und c) sowie 2 Ordnungszeiger (σ, ν) auf; das Resultat ist ein Tensor 2. Ordnung.

Die Bildung

$$(\beta) \quad Y_b M_{ab} Y_c V_{ac}$$

enthält 3 Paare von Summenzeigern und keinen Ordnungszeiger; sie entspricht daher einem Tensor nullter Ordnung oder Skalar.

Bei der Ausrechnung von Tensorausdrücken ist über die etwa auftretenden Summenzeiger zu summieren. In α) wäre z. B. die Summe über die Tensorausdrücke zu bilden, welche den 16 Variationen (mit Wiederholungen) zu zwei (b, c) der Elemente 1, 2, 3, 4 entsprechen, in β) die Summe über die 64 Variationen zu drei (a, b, c) dieser Elemente.

Die Entwicklung nach Summenzeigern läßt sich in manchen Fällen vereinfachen. Bei der Ausrechnung des inneren Produkts zweier Antitensoren 2. Ordnung

$$M_{a\beta} V_{a\beta}$$

wäre die Summe über die 12 nicht verschwindenden Variationen der Summenzeiger α, β zu bilden; da aber je zwei Glieder dieser Entwicklung gleich sind (z. B. $\mathbf{M}_{23}\mathbf{M}_{23} = \mathbf{M}_{32}\mathbf{M}_{32}$), läßt sie sich durch die Summe

$$2 \sum_{\alpha\beta} \mathbf{M}_{\alpha\beta} \mathbf{V}_{\alpha\beta}; \quad \alpha\beta = 23, 31, 12, 14, 24, 34$$

darstellen. Entsprechendes gilt für das innere Produkt zweier Antitensoren 3. Ordnung

$$\mathbf{H}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{B}_{\alpha\beta\gamma},$$

dessen Entwicklung nach den Summenzeigern 24 Summanden ergibt (die übrigen 40 verschwinden); diese lassen sich in der Form

$$6 \sum_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{H}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{B}_{\alpha\beta\gamma}; \quad \alpha\beta\gamma = 234, 143, 412, 321$$

zusammenfassen.

Weitere Rechnungsregeln:

Summenzeiger können ohneweiters untereinander vertauscht und durch andere Buchstaben ersetzt werden; dies ermöglicht einerseits Umformungen von Tensorausdrücken, andererseits lassen sich scheinbar verschiedene Ausdrücke als gleich erweisen.

Ordnungszeiger dürfen dagegen im allgemeinen nicht vertauscht werden; nur wenn es sich um markierte Zeiger oder solche von speziellen Tensoren handelt, ist die Vertauschung derselben mit Berücksichtigung der eventuell auftretenden Vorzeichenwechsel gestattet.

Der größte Vorteil der Einsteinschen Tensoranalysis liegt in der Assoziativität ihrer Bildungen; es erübrigt sich daher auch die Verwendung von Klammern. Wenn es sich um differentielle Operationen handelt, sind unter Umständen Klammern erforderlich, um den Bereich abzugrenzen, auf den sich diese Operationen erstrecken.

Beispiel: In der Bildung

$$\nabla_{\sigma} (\mathbf{M}_{\alpha\beta} \mathbf{V}_{\alpha\beta})$$

erstreckt sich die Operation ∇_{σ} auf die eingeklammerten Tensorsymbole; es ist daher

$$\nabla_{\sigma} (\mathbf{M}_{\alpha\beta} \mathbf{V}_{\alpha\beta}) = \mathbf{M}_{\alpha\beta} \nabla_{\sigma} \mathbf{V}_{\alpha\beta} + \mathbf{V}_{\alpha\beta} \nabla_{\sigma} \mathbf{M}_{\alpha\beta}.$$

Dagegen soll sich in

$$\nabla_{\sigma} \mathbf{M}_{\alpha\beta} \mathbf{V}_{\alpha\beta} = \mathbf{V}_{\alpha\beta} \nabla_{\sigma} \mathbf{M}_{\alpha\beta}$$

die Operation ∇_σ nur auf das unmittelbar folgende Tensor-symbol, also $M_{\alpha\beta}$, beziehen.

In Tensorausdrücken mit markierten Zeigern ist eine Assoziationsänderung nicht ohneweiters erlaubt. Betrachten wir beispielsweise das spezielle äußere Produkt

$$(A_{i\underline{k}} B_{i\underline{m}} C_{r\underline{s}} D_{t\underline{u}}),$$

so ist wohl eine Vertauschung der Tensorsymbole (etwa $(C_{r\underline{s}} A_{i\underline{k}} D_{t\underline{u}} B_{i\underline{m}})$) zulässig, doch dürfen dieselben im Hinblick auf die Bedeutung der Unterklammerung von Zeigern nicht in zwei Teilgruppen, etwa in der Weise

$$(A_{i\underline{k}} B_{i\underline{m}}) (C_{r\underline{s}} D_{t\underline{u}})$$

zusammengefaßt werden, wie dies bei Tensorsymbolen ohne markierte Zeiger möglich wäre. Die vollständige Entwicklung der betrachteten Bildung, welche nach (36) auch in der Form

$$(A_{i\underline{k}} B_{i\underline{m}} C_{r\underline{s}} D_{t\underline{u}}) = \begin{vmatrix} A_{ik} B_{im} C_{is} D_{iu} \\ A_{i\underline{k}} B_{i\underline{m}} C_{i\underline{s}} D_{i\underline{u}} \\ A_{rk} B_{rm} C_{rs} D_{ru} \\ A_{i\underline{k}} B_{i\underline{m}} C_{t\underline{s}} D_{t\underline{u}} \end{vmatrix}$$

geschrieben werden kann, ergibt 24 Glieder mit nicht markierten Zeigern; dieselbe kann auch nach (36a) als Summe von 4 Gliedern oder nach (36b) als Summe von 6 Gliedern mit markierten Zeigern dargestellt werden. — Um Irrtümer zu vermeiden, wird es sich empfehlen, derartige Tensorausdrücke gegebenenfalls in runde Klammern einzuschließen, um damit anzudeuten, daß die eingeklammerten Tensorsymbole nicht willkürlich assoziiert werden dürfen.

Wenn wir es mit Tensorgleichungen zu tun haben, welche beiderseits als Faktoren gleiche Tensorsymbole mit gleichen Zeigern aufweisen, so dürfen diese (falls sie nicht gleich Null sind) nur dann „gekürzt“ werden, wenn es sich um Tensorsymbole mit nicht markierten Ordnungszeigern oder mit zusammenhängenden Paaren von Summenzeigern handelt; werden jedoch dabei Paare von Summenzeigern getrennt, so ist die Kürzung im allgemeinen unzulässig. — Eine Tensorgleichung darf ferner nicht mit Tensorsymbolen multipliziert werden, wenn Zeiger der letzteren mit Summenzeigern von Gliedern

der betreffenden Gleichung übereinstimmen, da sonst in diesen Gliedern drei gleiche Zeiger auftreten würden. Es ist z. B. unzulässig, die Gleichung

$$Y_c \Omega' = Y_c V_{bc} Y_a M_{ab} - Y_a M_{ab} Y_c V_{ac}$$

mit Y_c oder Y_a zu multiplizieren, sondern es muß für dieses Symbol ein anderer, nicht vorkommender Zeiger gewählt werden, wenn es sich um eine äußere Multiplikation handelt.

In der Einsteinschen Tensoranalysis spielen die Zeiger der Tensorsymbole eine große Rolle; dies tritt noch mehr in Erscheinung, wenn die speziellen Tensorbildungen berücksichtigt werden. Bei einzelstehenden Tensorsymbolen gibt die Zahl der Zeiger die Ordnung (wenn es sich nicht gerade um verjüngte Tensoren handelt), ihre Markierung die besonderen Eigenschaften der Bestimmungsgrößen des betreffenden Tensors an. In Ausdrücken mit mehreren Tensorsymbolen bestimmt die Anordnung der Zeiger und ihre Markierung die Art der multiplikativen Verknüpfung. — Es ist daher bei Verwendung dieser Rechnungsmethode den Zeigern der Tensorsymbole ein besonderes Augenmerk zu widmen, da man sich in vielen Fällen durch einfache Überlegungen längere Ausrechnungen ersparen kann. Betrachten wir z. B. die Bildung

$$Y_b Y_c M_{bc};$$

in der Entwicklung nach den Summenzeigern b und c verschwinden die vier Glieder, für die $b = c$, da M_{bc} ein Antitensor ist. Unter den übrigbleibenden 12 Gliedern sind je zwei wegen $M_{bc} = -M_{cb}$ entgegengesetzt gleich und heben sich bei der Addition weg, so daß

$$(75) \quad Y_b Y_c M_{bc} = 0.$$

Die allgemeinsten Tensoren p ter Ordnung im R_4 haben 4^p verschiedene Bestimmungsgrößen, welche gleichzeitig voneinander unabhängig sind. Wie bereits im Abschnitt 5 bemerkt, ist die Bezeichnung „verschieden“ nicht gleichbedeutend mit „unabhängig“. So hat beispielsweise der Antitensor

$$C_{ik} = \underline{A_i B_k}$$

6 numerisch verschiedene, aber nur 5 unabhängige Bestimmungsgrößen, da das innere Produkt

$$C_{ik} C_{ik}^* = C_{23} C_{14} + C_{31} C_{24} + C_{12} C_{34} + C_{14} C_{23} + C_{24} C_{31} + C_{34} C_{12} \\ = 2(C_{23} C_{14} + C_{31} C_{24} + C_{12} C_{34})$$

verschwindet.

Von den speziellen Tensoren bieten die vollständig symmetrischen und die Antitensoren ein besonderes Interesse. Bei den vollständig symmetrischen Tensoren bleiben die Bestimmungsgrößen bei Vertauschung der Zeiger ungeändert; unter den 4^p Bestimmungsgrößen befinden sich

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}$$

verschiedene. Die Bestimmungsgrößen von Antitensoren ändern bei Vertauschung je zweier Zeiger ihr Vorzeichen, außerdem verschwinden jene mit gleichen Zeigern. Antitensoren p ter Ordnung haben $\binom{4}{p} p!$ von Null verschiedene Bestimmungsgrößen (wobei $p \leq 4$), von denen aber nur $\binom{4}{p}$ numerisch verschieden sind.

In nachstehender Tabelle (76) sind für die gewöhnlichen Tensoren und die zuletzt genannten speziellen Tensoren die Anzahl der von Null verschiedenen und der numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen zusammengestellt.

Ordnung	Bezeichnung	Anzahl der von Null verschiedenen Bestimmungsgr.	Anzahl der numerisch verschiedenen Bestimmungsgr.
0	Tensor nullter Ordnung (Skalar)	1	1
1	Tensor 1. Ordnung (Vierervektor)	4	4
2	Tensor	16	16
	Vollständig symmetrischer Tensor	16	10
	Antitensor	12	6
3	Tensor	64	64
	Vollständig symmetrischer Tensor	64	20
	Antitensor	24	4
4	Tensor	256	256
	Vollständig symmetrischer Tensor	256	35
	Antitensor	24	1

In dem hiermit abgeschlossenen ersten Teil meiner Arbeit habe ich die von Einstein für die a. R. T. entwickelte Tensoranalysis auf die sp. R. T. zugeschnitten und sie so dann in der Richtung einer besonderen Berücksichtigung der speziellen Tensorbildungen ausgebaut. In entsprechender Weise

läßt sich auch die Tensoranalysis der a. R. T. ausbauen, nur sind die hierbei auftretenden speziellen Bildungen wegen der Unterscheidung von kontravarianten und kovarianten Tensoren ungleich mannigfaltiger.

In den folgenden Abschnitten soll die behandelte Rechnungsmethode auf die Elektrodynamik des leeren Raumes und die Minkowskische Elektrodynamik der ponderablen Körper angewendet und die für beide Fälle geltenden Spannungs-Energie-Tensoren abgeleitet werden. Zuletzt wird der vollständige Ausdruck der Viererkraft für beschleunigungsfrei bewegte isotrope Körper aufgestellt.

16. Elektrodynamik des leeren Raumes nach der sp. R. T.¹⁾

— Die antitensorische Erhöhung [vgl. (70)] des Viererpotentials $\Phi_\nu(\mathfrak{A}; i\varphi)$ ergibt den Antitensor 2. Ordnung

$$(76) \quad M_{\mu\nu} = \nabla_\mu \Phi_\nu - \nabla_\nu \Phi_\mu$$

mit den 12 von Null verschiedenen (6 numerisch verschiedenen) Bestimmungsgrößen

$$(76a) \quad \begin{cases} M_{23} = -M_{32} = \mathfrak{H}_x, \\ M_{31} = -M_{13} = \mathfrak{H}_y, \\ M_{12} = -M_{21} = \mathfrak{H}_z, \\ M_{14} = -M_{41} = -i\mathfrak{E}_x, \\ M_{24} = -M_{42} = -i\mathfrak{E}_y, \\ M_{34} = -M_{43} = -i\mathfrak{E}_z. \end{cases}$$

Bedeutung der Schreibweise $\Phi_\nu(\mathfrak{A}; i\varphi)$: Die Komponenten des dreidimensionalen Vektors vor dem Strichpunkt sind den Bestimmungsgrößen Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 , der Skalar nach dem Strichpunkt der Bestimmungsgröße Φ_4 gleich. Die erste Beziehung wird gelegentlich auch in der Form

$$\Phi_{(1, 2, 3)} = \mathfrak{A}$$

geschrieben werden.

Die sechs numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen des Antitensors $M_{\mu\nu}$, den wir kurz als „Feldtensor“ bezeichnen wollen, entsprechen den Komponenten der magnetischen und elektrischen Feldstärke, was wir auch durch die Schreibweise

$$M_{\mu\nu}(\mathfrak{H}; -i\mathfrak{E})$$

1) Vgl. auch M. v. Laue, Das Relativitätsprinzip. p. 87ff.

andeuten werden. Die Komponenten des dreidimensionalen Vektors vor dem Strichpunkt sind den Bestimmungsgrößen \underline{M}_{23} , \underline{M}_{31} und \underline{M}_{12} , die Komponenten des Vektors nach dem Strichpunkt den Bestimmungsgrößen \underline{M}_{14} , \underline{M}_{24} und \underline{M}_{34} des Antitensors \underline{M}_{μ} gleich.

Die Erniedrigung von \underline{M}_{μ} , [vgl. (72)] bestimmt die Viererdichte $P_{\mu} \left(\frac{e v}{c}; i \rho \right)$:

$$(77) \quad \nabla_{\sigma} \underline{M}_{\mu\sigma} = P_{\mu}.$$

Die Entwicklung von (77) nach den Summenzeigern σ ergibt vier Gleichungen, welche in gewöhnlicher Schreibweise den Maxwell-Lorentzschen Gleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{e v}{c}$$

und

$$\text{div } \mathfrak{E} = \rho$$

entsprechen.

Die antitensorische Erhöhung von \underline{M}_{μ} , [vgl. (71)] verschwindet:

$$(78) \quad \nabla_{\sigma} \underline{M}_{\mu\sigma} = \nabla_{\sigma} \underline{M}_{\mu\sigma} + \nabla_{\mu} \underline{M}_{\sigma\sigma} + \nabla_{\sigma} \underline{M}_{\sigma\mu} = 0.$$

Die linke Seite von (78) stellt einen Antitensor 3. Ordnung dar, welcher nach früherem 24 von Null verschiedene Bestimmungsgrößen besitzt, von denen aber nur vier numerisch verschieden sind. Das Nullsetzen dieser vier nach (78) entwickelten Bestimmungsgrößen entspricht in gewöhnlicher Schreibweise den Gleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0$$

und

$$\text{div } \mathfrak{H} = 0.$$

Mit Einführung der Ergänzung ließe sich (78) in Analogie zu (67) durch

$$(79) \quad \nabla_{\sigma} \underline{M}_{\mu\sigma}^* = 0$$

ersetzen.

Die Viererkraft

$$F\{\mathfrak{F} = e \left\{ \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathfrak{H}] \right\}; \frac{i}{c} (\mathbf{v} \mathfrak{F})\},$$

ergibt sich als das innere Produkt der Viererdichte und des Feldtensors:

$$(80) \quad F_{\sigma} = P_{\mu} M_{\sigma\mu}.$$

F_{σ} läßt sich auch, wie im folgenden gezeigt werden soll, als Erniedrigung eines Tensors 2. Ordnung darstellen, welcher als „Spannungs-Energie-Tensor“ in der R. T. eine wichtige Rolle spielt. — Wir setzen in (80) nach (77)

$$P_{\mu} = \nabla_{\nu} M_{\mu\nu}$$

ein und erhalten

$$F_{\sigma} = M_{\sigma\mu} \nabla_{\nu} M_{\mu\nu} = \nabla_{\nu} (M_{\sigma\mu} M_{\mu\nu}) - M_{\mu\nu} \nabla_{\nu} M_{\sigma\mu}.$$

Wenn im letzten Gliede die Summenzeiger μ und ν vertauscht werden, resultiert ein gleichwertiger Ausdruck, so daß es auch in der Form

$$\begin{aligned} -M_{\mu\nu} \nabla_{\nu} M_{\sigma\mu} &= -\frac{1}{2} (M_{\mu\nu} \nabla_{\nu} M_{\sigma\mu} + M_{\nu\mu} \nabla_{\mu} M_{\sigma\nu}) \\ &= -\frac{1}{2} M_{\mu\nu} (\nabla_{\nu} M_{\sigma\mu} + \nabla_{\mu} M_{\nu\sigma}) \end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Nach (78) ist aber der Ausdruck in der runden Klammer gleich $-\nabla_{\sigma} M_{\mu\nu}$, so daß

$$-M_{\mu\nu} \nabla_{\nu} M_{\sigma\mu} = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} \nabla_{\sigma} M_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_{\sigma} (M_{\mu\nu} M_{\mu\nu})$$

und damit

$$(81) \quad F_{\sigma} = \nabla_{\nu} (M_{\sigma\mu} M_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \nabla_{\sigma} (M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}).$$

In dem ersten Glied der rechten Seite ist über die Summenzeiger ν, μ zu summieren, wobei ∇_{ν} alle Werte von

$$\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x} \text{ bis } \nabla_4 = \frac{\partial}{\partial t}$$

annimmt; unter diesen Werten befindet sich auch das ∇_{σ} des zweiten Gliedes. Mit Einführung des speziellen Tensors 2. Ordnung $\delta_{\sigma\nu}$ [vgl. (14)] lassen sich die beiden genannten Glieder zusammenfassen:

$$(81a) \quad F_{\sigma} = \nabla_{\nu} (M_{\sigma\mu} M_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \delta_{\sigma\nu} M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}).$$

Aus dieser Gleichung ist zu ersehen, daß F_{σ} als Erniedrigung eines Tensors 2. Ordnung in der Form

$$(81b) \quad F_{\sigma} = \nabla_{\nu} \bar{T}_{\sigma\nu}$$

dargestellt werden kann, wobei

$$(82) \quad \bar{T}_{\sigma\nu} = -M_{\sigma\mu} M_{\nu\mu} + \frac{1}{2} \delta_{\sigma\nu} M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}.$$

Diese Bildung ist der gesuchte Spannungs-Energie-Tensor für den leeren Raum; $\bar{T}_{\sigma\nu}$ ist symmetrisch (durch Überstreichen des Symbols bezeichnet), da die Vertauschung der Ordnungszeiger σ, ν die Bestimmungsgrößen ungeändert läßt.

Das zweite Glied der rechten Seite von (82) kommt nur für jene Bestimmungsgrößen von $\bar{T}_{\sigma\nu}$ in Betracht, welche gleiche Zeiger besitzen (\bar{T}_{11} , \bar{T}_{22} , \bar{T}_{33} und \bar{T}_{44}); hierbei ist $\delta_{\sigma\nu} = 1$. Für alle anderen Bestimmungsgrößen verschwindet das genannte Glied, da $\delta_{\sigma\nu} = 0$.

Laue setzt den Spannungs-Energie-Tensor der Form

$$(82a) \quad \bar{T}_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} (M_{\sigma\mu}^* M_{\nu\mu}^* - M_{\sigma\mu} M_{\nu\mu})$$

entsprechend an, welche mit (82) identisch ist, da die Ausrechnung die Beziehung

$$(83) \quad M_{\sigma\mu}^* M_{\nu\mu}^* = - M_{\sigma\mu} M_{\nu\mu} + \frac{1}{2} \delta_{\sigma\nu} M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}$$

ergibt.

17. Elektrodynamik ponderabler Körper. — Beim Vorhandensein ponderabler Körper wird das elektromagnetische Feld durch die Vektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{D} bzw. \mathfrak{H} und \mathfrak{B} beschrieben, deren Komponenten als die numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen zweier Antitensoren 2. Ordnung, nämlich des „Feldtensors“

$$M_{\mu\nu}(\mathfrak{B}; -i\mathfrak{E})$$

und des „Verschiebungstensors“

$$V_{\mu\nu}(\mathfrak{H}; -i\mathfrak{D})$$

angesehen werden können.

Die Erniedrigung des Feldtensors bestimmt den Viererstrom

$$(84) \quad P_\mu \left\{ \frac{1}{c} (\mathfrak{B} + \varrho v); i\varrho \right\};$$

$$\nabla_\sigma M_{\mu\sigma} = P_\mu.$$

In gewöhnlicher Schreibweise entsprechen den vier Gleichungen (84) die durch den Konvektionsstrom ergänzten Maxwell'schen Gleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{1}{c} (\mathfrak{B} + \varrho v)$$

und

$$\text{div } \mathfrak{D} = \varrho.$$

Die antitensorische Erhöhung des Verschiebungstensors verschwindet:

$$(85) \quad \nabla_\sigma V_{\mu\nu} = \nabla_\sigma V_{\mu\nu} + \nabla_\mu V_{\nu\sigma} + \nabla_\nu V_{\sigma\mu};$$

im Sinne der Bemerkungen zu (78) entwickelt, ergibt (85) die Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0$$

und

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Um die für isotrope Körper nach der Maxwell'schen Theorie geltenden Beziehungen

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$$

und

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

in vierdimensionaler Schreibweise auszudrücken, führen wir mit Benutzung der Vierergeschwindigkeit Y_σ vier neue Tensorbildungen ein. Die Bestimmungsgrößen von Y_σ sind¹⁾:

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{(1,2,3)} = \frac{v}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \kappa q, \\ Y_4 = \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = i \kappa, \end{array} \right.$$

wobei zur Abkürzung

$$(87) \quad q = \frac{v}{c}; \quad \kappa = \frac{v}{c}$$

und

$$(88) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}} = \kappa$$

gesetzt wurde. — Für das innere Produkt der Vierergeschwindigkeit mit sich selbst ergibt die Ausrechnung

$$(89) \quad Y_\sigma Y_\sigma = -1.$$

Durch innere Multiplikation der Vierergeschwindigkeit mit dem Feldtensor erhalten wir den Vierervektor

$$(90) \quad E_\mu = Y_\sigma M_{\mu\sigma};$$

die Ausrechnung seiner Bestimmungsgrößen ergibt:

$$(90a) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{(1,2,3)} = \kappa \{ \mathfrak{E} + [q \mathfrak{B}] \} = \kappa \mathfrak{E}^*, \\ E_4 = i \kappa (q \mathfrak{E}) = i \kappa (q \mathfrak{E}^*), \end{array} \right.$$

wobei mit Laue²⁾

1) Vgl. etwa M. v. Laue, l. c. p. 69.

2) p. 149.

$$(91) \quad \mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + [q \mathfrak{B}]$$

gesetzt ist („elektrische treibende Kraft“).

Die innere Multiplikation der Vierergeschwindigkeit mit dem Verschiebungstensor ergibt den Vierervektor

$$(92) \quad D_\mu = Y_\sigma V_{\mu\sigma}$$

mit den Bestimmungsgrößen

$$(92a) \quad \begin{cases} D_{(1,2,3)} = \kappa \{ \mathfrak{D} + [q \mathfrak{H}] \} = \kappa \mathfrak{D}^*, \\ D_4 = i \kappa (q \mathfrak{D}) = i \kappa (q \mathfrak{D}^*), \end{cases}$$

wobei

$$(93) \quad \mathfrak{D}^* = \mathfrak{D} + [q \mathfrak{H}]$$

Für $q = 0$ (Ruhesystem) reduziert sich $E_{(1,2,3)}$ auf \mathfrak{E} , $D_{(1,2,3)}$ auf \mathfrak{D} , E_4 und D_4 verschwinden. Dieser Umstand legt es nahe, für isotrope Körper den Ansatz

$$(94) \quad D_\mu = \varepsilon E_\mu$$

zu machen, welcher in gewöhnlicher Schreibweise die Beziehung

$$(94a) \quad \mathfrak{D}^* = \varepsilon \mathfrak{E}^*$$

ausdrückt.

Das äußere Antitensorprodukt der Vierergeschwindigkeit mit dem Feldtensor führt auf den Antitensor 3. Ordnung

$$(95) \quad B_{\sigma\mu\nu} = \underline{Y_\sigma M_{\mu\nu}} = Y_\sigma M_{\mu\nu} + Y_\mu M_{\nu\sigma} + Y_\nu M_{\sigma\mu}$$

mit 24 von Null verschiedenen (4 numerisch verschiedenen) Bestimmungsgrößen, welche nachstehend zusammengestellt sind:

$$(95a) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{234} = -B_{243} = B_{343} = -B_{324} = B_{423} = -B_{432} \\ \qquad \qquad \qquad = i \kappa \mathfrak{B}_x^*, \\ B_{143} = -B_{134} = B_{431} = -B_{413} = B_{314} = -B_{341} \\ \qquad \qquad \qquad = i \kappa \mathfrak{B}_y^*, \\ B_{412} = -B_{421} = B_{124} = -B_{142} = B_{241} = -B_{214} \\ \qquad \qquad \qquad = i \kappa \mathfrak{B}_z^*, \\ B_{321} = -B_{312} = B_{213} = -B_{231} = B_{132} = -B_{123} \\ \qquad \qquad \qquad = -\kappa (q \mathfrak{B}^*). \end{array} \right.$$

Dabei ist

$$(96) \quad \mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} - [q \mathfrak{H}]$$

gesetzt. — Schließlich ergibt das äußere Antitensorprodukt der Vierergeschwindigkeit mit dem Verschiebungstensor den Antitensor 3. Ordnung

$$(97) \quad H_{\sigma\mu\nu} = \underline{Y_\sigma V_{\mu\nu}} = Y_\sigma V_{\mu\nu} + Y_\mu V_{\nu\sigma} + Y_\nu V_{\sigma\mu},$$

mit den Bestimmungsgrößen

$$(97a) \quad \begin{cases} H_{334} = i\kappa \mathfrak{H}_x^*, \\ H_{143} = i\kappa \mathfrak{H}_y^*, \\ H_{412} = i\kappa \mathfrak{H}_z^*, \\ H_{321} = -\kappa(q \mathfrak{H}^*), \end{cases}$$

wobei

$$(98) \quad \mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} - [q \mathfrak{D}].$$

Die ersten drei numerisch verschiedenen Bestimmungsgrößen von $B_{\sigma\mu\nu}$ reduzieren sich für $q = 0$ nach (95a) auf die Komponenten von \mathfrak{B} , die von $H_{\sigma\mu\nu}$ nach (97a) auf die Komponenten von \mathfrak{H} , so daß in Analogie zu (94) der Ansatz

$$(99) \quad B_{abc} = \mu H_{abc},$$

gemacht werden kann, welcher 24 Gleichungen zwischen den von Null verschiedenen Bestimmungsgrößen der Antitensoren B_{abc} und H_{abc} umfaßt; je sechs dieser Gleichungen sind aber identisch, so daß nur vier verschiedene Gleichungen übrigbleiben, welche in gewöhnlicher Schreibweise die Beziehung

$$\mathfrak{B}^* = \mu \mathfrak{H}^*$$

zum Ausdruck bringen.

Bei Einführung der Ergänzungen von $M_{\mu\nu}$ und $V_{\mu\nu}$ ließe sich (95) und (97) durch

$$(100) \quad B_\mu = Y_\sigma M_{\mu\sigma}^*$$

bzw.

$$(101) \quad H_\mu = Y_\sigma V_{\mu\sigma}^*$$

und (99) durch

$$(102) \quad B_\mu = \mu H_\mu,$$

ersetzen.¹⁾ Es wird wohl dadurch die Einführung von Antitensoren 3. Ordnung vermieden, doch bedeutet dies keine Vereinfachung.

Mit Benutzung der vorstehend behandelten Bildungen läßt sich der Minkowskische Ruhestrahl²⁾ in der Form

$$(103) \quad \Omega_\sigma = Y_a E_b H_{\sigma ab}$$

darstellen. Wir wollen hier als Beispiel die Bestimmungs-

1) Vgl. M. v. Laue, l. c. p. 150.

2) H. Minkowski, Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik. B. G. Teubner 1910. p. 35.

größe Ω_1 tatsächlich ausrechnen. Auf der rechten Seite von (103) ist über alle Variationen der Summenzeiger a, b zu summieren. Da aber H_{aab} ein Antitensor ist, verschwinden alle Summanden, für die $a = b$, und auch jene, für die $a = b = \sigma$ ist; die übrigbleibenden Variationen der Summenzeiger sind daher: 23, 24, 32, 34, 42, 43, so daß

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= Y_1 E_3 H_{123} + Y_2 E_4 H_{124} + Y_3 E_2 H_{132} + Y_3 E_4 H_{134} \\ &\quad + Y_4 E_2 H_{142} + Y_4 E_3 H_{143} \\ &= (Y_2 E_3 - Y_3 E_2) H_{123} + (Y_2 E_4 - Y_4 E_2) H_{124} \\ &\quad + (Y_3 E_4 - Y_4 E_3) H_{134}.\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der früher angegebenen Werte für die Bestimmungsgrößen von Y_a, E_b und H_{aab} erhalten wir

$$\Omega_1 = \kappa^3 \{ [q \mathfrak{E}^*]_x (q \mathfrak{H}^*) - [q \mathfrak{H}^*]_x (q \mathfrak{E}^*) + [\mathfrak{E}^* \mathfrak{H}^*]_x \};$$

analoge Ausdrücke ergeben sich für die Bestimmungsgrößen Ω_2 und Ω_3 , die wir mit Ω_1 zu

$$\Omega_{(1,2,3)} = \kappa^3 \{ [q [q \mathfrak{E}^* \mathfrak{H}^*]] + [\mathfrak{E}^* \mathfrak{H}^*] \}$$

zusammenfassen. Wenn wir das dreifache Vektorprodukt in die Differenz

$$q (q [\mathfrak{E}^* \mathfrak{H}^*]) - q^2 [\mathfrak{E}^* \mathfrak{H}^*]$$

auflösen und die nach (88) geltende Beziehung

$$(104) \quad \kappa^2 (1 - q^2) = 1$$

berücksichtigen, wird schließlich

$$(103a) \quad \begin{cases} \Omega_{(1,2,3)} = \kappa [\mathfrak{E}^* \mathfrak{H}^*] + \kappa^3 q (q [\mathfrak{E}^* \mathfrak{H}^*]); \\ \Omega_i = i \kappa^3 (q [\mathfrak{E}^* \mathfrak{H}^*]), \end{cases}$$

ergibt sich analog. — Für $q = 0$ reduziert sich $\Omega_{(1,2,3)}$ auf $[\mathfrak{E}^* \mathfrak{H}^*]$, den durch die Lichtgeschwindigkeit c dividierten Poyntingschen Vektor $\mathfrak{S} = c [\mathfrak{E}^* \mathfrak{H}^*]$.

Der Minkowskische Ruhestrahl ließe sich nach (67) auch in der Form

$$\Omega_i = Y_k S_{ik}^*$$

schreiben, wobei

$$S_{ik}^* = \frac{1}{2} I_{iklm} E_l H_m.$$

Eine dem Ruhestrahl analoge Bildung ist der Vierervektor

$$(105) \quad \varepsilon \mu \Omega_\sigma = Y_a D_b V_{\sigma ab};$$

die Bestimmungsgrößen desselben ergeben sich aus den Gleichungen (103a), wenn in ihnen \mathfrak{E}^* durch \mathfrak{D}^* und \mathfrak{H}^* durch \mathfrak{B}^* ersetzt wird. Von Wichtigkeit ist ferner die Bildung

$$(106) \quad \Omega'_\sigma = (\varepsilon\mu - 1) \Omega_\sigma = Y_\sigma (D_b R_{\sigma ab} - E_b H_{\sigma ab})$$

mit den Bestimmungsgrößen

$$(106a) \quad \begin{cases} \Omega_{(1,2,3)} = x \{ [\mathfrak{D}^* \mathfrak{B}^*] - [\mathfrak{E}^* \mathfrak{H}^*] \} + x^3 q, (q [\mathfrak{D}^* \mathfrak{B}^*] - [\mathfrak{E}^* \mathfrak{H}^*]), \\ \Omega'_4 = i x^3 (q, [\mathfrak{D}^* \mathfrak{B}^*] - [\mathfrak{E}^* \mathfrak{H}^*]). \end{cases}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\mathfrak{B} = x^2 \{ [\mathfrak{D}^* \mathfrak{B}^*] - [\mathfrak{E}^* \mathfrak{H}^*] + x^2 q (q, [\mathfrak{D}^* \mathfrak{B}^*] - [\mathfrak{E}^* \mathfrak{H}^*]) \};$$

damit wird

$$(107) \quad \begin{cases} \Omega_{(1,2,3)} = \frac{\mathfrak{B}}{x}, \\ \Omega'_4 = \frac{i}{x} (q \mathfrak{B}). \end{cases}$$

18. Der Spannungs-Energie-Tensor für ponderable Körper.

— In (82) haben wir den Spannungs-Energie-Tensor für den leeren Raum in der Form

$$\bar{T}_{\sigma\nu} = - M_{\sigma\mu} M_{\nu\mu} + \frac{1}{4} \delta_{\sigma\nu} M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}$$

abgeleitet, welcher dort durch den Feldtensor $M_{\mu\nu}$ bestimmt ist. In der Elektrodynamik ponderabler Körper haben wir jedoch zwischen dem Feldtensor $M_{\mu\nu}$ und dem Verschiebungstensor $V_{\mu\nu}$ zu unterscheiden, und fragt es sich, wie in diesem Falle der Spannungs-Energie-Tensor anzusetzen ist. Man könnte zunächst daran denken, den Ansatz (82) in

$$(108) \quad T''_{\sigma\nu} = - M_{\sigma\mu} V_{\nu\mu} + \frac{1}{4} \delta_{\sigma\nu} M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}$$

oder

$$(109) \quad T'''_{\sigma\nu} = T''_{\nu\sigma} = - V_{\sigma\mu} M_{\nu\mu} + \frac{1}{4} \delta_{\sigma\nu} M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta},$$

abzuändern; die ersten Glieder auf der rechten Seite von (108) und (109) sind nicht gleich, da sie sich durch vertauschte Ordnungszeiger unterscheiden (konjugierte Tensoren).

Die Ansätze (108) und (109) haben den „Schönheitsfehler“, daß sie nicht symmetrisch sind; wir erhalten einen symmetrischen Ansatz in ihrer halben Summe

$$(110) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{T}'_{\sigma\nu} &= \frac{1}{2}(T''_{\sigma\nu} + T'''_{\sigma\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}(\overline{M_{\sigma\mu} V_{\nu\mu}} + \overline{M_{\nu\mu} V_{\sigma\mu}}) + \frac{1}{4}\delta_{\sigma\nu} \overline{M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}}. \end{aligned} \right.$$

Der Ausdruck in der runden Klammer ist das gemischte symmetrische Produkt $\overline{M_{\sigma\mu} V_{\nu\mu}}$ [vgl. (58)], so daß wir auch

$$(110a) \quad \bar{T}'_{\sigma\nu} = -\frac{1}{2}\overline{M_{\sigma\mu} V_{\nu\mu}} + \frac{1}{4}\delta_{\sigma\nu} \overline{M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}}$$

schreiben können.

Die Ansätze (108), (109) und (110) gehen zwar in (82) über, wenn $V_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}$ gesetzt wird, so daß sie in dieser Hinsicht gleichwertig sind. Dies genügt aber noch nicht, da keiner dieser Ansätze die Geschwindigkeit der ponderablen Körper enthält. Grammel hat nun gezeigt¹⁾, daß die genannten drei Ansätze durch Zusatzglieder ergänzt werden müssen, damit ihre nach (81b) gebildeten Erniedrigungen befriedigende Ausdrücke für die Viererkraft ergeben. Am Schlusse dieser Arbeit wird bemerkt:

„Der Unterschied zwischen den drei Ansätzen macht sich ... erst bemerkbar, wenn man es mit veränderlicher Geschwindigkeit der Materie zu tun hat. Allerdings nehmen Impuls- und Energiesatz schon für gleichförmig bewegte Körper bei den drei Ansätzen verschiedene Formen an.“

Das letztere ist nun in Wirklichkeit nicht der Fall, sondern es sind die nach Grammel ergänzten Tensoransätze, wie weiter unten gezeigt wird, vollkommen identisch.

Wir wollen daher im folgenden von dem symmetrischen Ansatz (110) ausgehen, den Grammel durch das (halbe) äußere symmetrische Produkt der Vierervektoren Y_σ und Ω'_ν [vgl. (106)]

$$(111) \quad \overline{Y_\sigma \Omega'_\nu} = Y_\sigma \Omega'_\nu + Y_\nu \Omega'_\sigma$$

ergänzt. Der Spannungs-Energie-Tensor für ponderable Körper ergibt sich dann in der Form

$$(112) \quad \bar{T}'_{\sigma\nu} = -\frac{1}{2}\overline{M_{\sigma\mu} V_{\nu\mu}} + \frac{1}{4}\delta_{\sigma\nu} \overline{M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}} + \frac{1}{2}\overline{Y_\sigma \Omega'_\nu};$$

seine Bestimmungsgrößen sind

1) R. Grammel, Zur relativitätstheoretischen Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. d. Phys. 41. p. 570ff. 1913.

$$\begin{aligned}
 (112a) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 T_{11} &= \frac{1}{2} \left\{ \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x - \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_y \right. \\
 &\quad \left. - \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_z \right\} + q_x \mathfrak{W}_x \\
 T_{22} &= \frac{1}{2} \left\{ -\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z - \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_y \right. \\
 &\quad \left. - \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_z \right\} + q_y \mathfrak{W}_y \\
 T_{33} &= \frac{1}{2} \left\{ -\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z - \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x - \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_y \right. \\
 &\quad \left. + \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_z \right\} + q_z \mathfrak{W}_z \\
 T_{44} &= \frac{1}{2} \left\{ \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_y \right. \\
 &\quad \left. + \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_z \right\} - (q \mathfrak{W}) \\
 T_{23} = T_{32} &= \frac{1}{2} \left\{ \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_z + \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_y \right. \\
 &\quad \left. + q_y \mathfrak{W}_z + q_z \mathfrak{W}_y \right\} \\
 T_{31} = T_{13} &= \frac{1}{2} \left\{ \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_z \right. \\
 &\quad \left. + q_z \mathfrak{W}_x + q_x \mathfrak{W}_z \right\} \\
 T_{12} = T_{21} &= \frac{1}{2} \left\{ \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_x \right. \\
 &\quad \left. + q_x \mathfrak{W}_y + q_y \mathfrak{W}_x \right\} \\
 T_{14} = T_{41} &= -\frac{i}{2} \left\{ [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_x + [\mathfrak{D} \mathfrak{B}]_x - \mathfrak{W}_x - q_x (q \mathfrak{W}) \right\} \\
 T_{24} = T_{42} &= -\frac{i}{2} \left\{ [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_y + [\mathfrak{D} \mathfrak{B}]_y - \mathfrak{W}_y - q_y (q \mathfrak{W}) \right\} \\
 T_{34} = T_{43} &= -\frac{i}{2} \left\{ [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_z + [\mathfrak{D} \mathfrak{B}]_z - \mathfrak{W}_z - q_z (q \mathfrak{W}) \right\}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Die Erniedrigung des Spannungs-Energie-Tensors (112) ist die Viererkraft für ponderable Körper

$$(113) \quad F_\sigma = \nabla_\nu \bar{T}_{\sigma\nu}.$$

19. Für die weiteren Entwicklungen sind einige Zwischenrechnungen erforderlich. — Wir betrachten zunächst das äußere Antitensorprodukt

$$(114) \quad \underline{Y_\sigma \Omega'_\nu} = Y_\sigma \Omega'_\nu - Y_\nu \Omega'_\sigma,$$

welches in verschiedener Weise umgeformt werden kann.

a) Wir setzen in (106)

$$D_b = Y_c V_{bc} \text{ [nach (92)]},$$

$$E_b = Y_c M_{bc} \text{ [nach (90)]},$$

$$B_{\sigma ab} = \underline{Y_\sigma M_{ab}} = Y_\sigma M_{ab} + Y_\sigma M_{b\sigma} + Y_b M_{\sigma a} \text{ [nach (95)]},$$

$$H_{\sigma ab} = \underline{Y_\sigma V_{ab}} = Y_\sigma V_{ab} + Y_a V_{b\sigma} + Y_b V_{\sigma a} \text{ [nach (97)]},$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \Omega'_\sigma &= Y_a Y_c V_{bc} Y_\sigma M_{ab} + Y_a Y_c V_{bc} Y_a M_{b\sigma} + Y_a Y_c V_{bc} Y_b M_{\sigma a} \\ &\quad - Y_a Y_c M_{bc} Y_\sigma V_{ab} - Y_a Y_c M_{bc} Y_a V_{b\sigma} - Y_a Y_c M_{bc} Y_b V_{\sigma a}. \end{aligned}$$

Die ersten zwei untereinander stehenden Glieder sind, wie sich durch Vertauschung der Summenzeiger a und c ergibt, numerisch gleich und heben sich bei der Subtraktion weg; die beiden letzten Glieder enthalten die nach (75) verschwindenden Ausdrücke

$$Y_b Y_c V_{bc} \text{ bzw. } Y_b Y_c M_{bc}$$

und sind daher selbst Null. Wenn wir in den zwei übrigen Gliedern nach (89)

$$Y_a Y_a = -1$$

setzen, wird

$$(115) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega'_\sigma &= -Y_c V_{bc} M_{b\sigma} + Y_c M_{bc} V_{b\sigma} \\ &= D_b M_{\sigma b} - E_b V_{\sigma b}. \end{aligned} \right.$$

Wir schreiben nun die folgenden drei Gleichungen untereinander:

$$\begin{aligned} Y_\sigma \Omega'_\nu &= Y_c V_{bc} Y_\sigma M_{\nu b} - Y_c M_{bc} Y_\sigma V_{\nu b} \\ - Y_\nu \Omega'_\sigma &= Y_c V_{bc} Y_\nu M_{b\sigma} - Y_c M_{bc} Y_\nu V_{b\sigma} \\ 0 &= Y_c V_{bc} Y_b M_{\sigma\nu} - Y_c M_{bc} Y_b V_{\sigma\nu}. \end{aligned}$$

Die beiden ersten Gleichungen ergeben sich durch äußere Multiplikation von (115) mit der Vierergeschwindigkeit, die dritte ist wegen (89) erfüllt; ihre Summe ergibt

$$(116) \quad Y_\sigma \Omega'_\nu - Y_\nu \Omega'_\sigma = Y_c V_{bc} Y_\sigma \underline{M_{\nu b}} - Y_c M_{bc} Y_\sigma \underline{V_{\nu b}}$$

oder

$$(116a) \quad \underline{Y_\sigma \Omega'_\nu} = D_b B_{\sigma\nu b} - E_b H_{\sigma\nu b} = (\epsilon\mu - 1) E_b H_{\sigma\nu b}.$$

b) Um eine andere Darstellung für das äußere Antitensorprodukt $\underline{Y_\sigma \Omega'_\nu}$ zu gewinnen, gehen wir von dem gemischten Produkt

$$H_{\nu bc} B_{\sigma bc} = Y_\nu V_{bc} Y_\sigma M_{bc}$$

aus und entwickeln darin zunächst $\underline{Y_\nu V_{bc}}$ nach (97):

$$(117) \quad \left\{ \begin{aligned} H_{\nu bc} B_{abc} &= Y_{\nu} V_{bc} Y_{\sigma} \underline{M_{bc}} + Y_b V_{c\nu} Y_{\sigma} \underline{M_{bc}} \\ &\quad + Y_c V_{\nu b} Y_{\sigma} \underline{M_{bc}}. \end{aligned} \right.$$

Das erste Glied der rechten Seite gibt bei der Entwicklung des Antitensorprodukts

$$Y_{\nu} V_{bc} Y_{\sigma} \underline{M_{bc}} + Y_{\nu} V_{bc} Y_b \underline{M_{c\sigma}} + Y_{\nu} V_{bc} Y_c \underline{M_{\sigma b}};$$

die beiden letzten Glieder des vorstehenden Ausdruckes sind gleich (ergibt sich durch Vertauschung der Summenzeiger b und c) und können zu

$$2 Y_{\nu} V_{bc} Y_b \underline{M_{c\sigma}} = -2 D_c Y_{\nu} \underline{M_{c\sigma}}$$

zusammengefaßt werden.

Die beiden letzten Glieder von (117) sind ebenfalls gleich; wir fassen sie zu

$$2 Y_b V_{c\nu} Y_{\sigma} \underline{M_{bc}}$$

zusammen und entwickeln $\underline{Y_{\sigma} M_{bc}}$:

$$\begin{aligned} 2 Y_b V_{c\nu} Y_{\sigma} \underline{M_{bc}} + 2 Y_b V_{c\nu} Y_b \underline{M_{c\sigma}} + 2 Y_b V_{c\nu} Y_c \underline{M_{\sigma b}} \\ = 2 E_c Y_{\sigma} V_{\nu c} - 2 \underline{M_{\sigma c}} V_{\nu c} - 2 \varepsilon E_{\sigma} E_{\nu}. \end{aligned}$$

Wenn wir die umgeformten Glieder der rechten Seite von (117) zusammenfassen und auf der linken Seite

$$B_{abc} = \mu H_{abc}$$

setzen, erhalten wir

$$(117a) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu H_{\nu bc} H_{abc} &= -2 D_c Y_{\nu} \underline{M_{c\sigma}} + 2 E_c Y_{\sigma} V_{\nu c} \\ &\quad - 2 \underline{M_{\sigma c}} V_{\nu c} + Y_{\nu} Y_{\sigma} \underline{M_{bc}} V_{bc} - 2 \varepsilon E_{\sigma} E_{\nu}. \end{aligned} \right.$$

Wir denken uns nun aus (117a) durch Vertauschung der Ordnungszeiger ν und σ eine zweite Gleichung gebildet, welche wir von der angeschriebenen subtrahieren. Dabei heben sich die linken Seiten und die beiden letzten Glieder der rechten Seiten weg; es bleibt übrig

$$\begin{aligned} 0 = -D_c (Y_{\sigma} \underline{M_{\nu c}} + Y_{\nu} \underline{M_{c\sigma}}) + E_c (Y_{\sigma} V_{\nu c} + Y_{\nu} V_{c\sigma}) \\ - (\underline{M_{\sigma c}} V_{\nu c} - \underline{M_{\nu c}} V_{c\sigma}). \end{aligned}$$

Die Klammerausdrücke der ersten zwei Glieder auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung ergänzen wir durch

$$-D_c Y_c \underline{M_{\sigma\nu}} = -Y_b V_{cb} Y_c \underline{M_{\sigma\nu}} = 0 \text{ [wegen (75)]},$$

bzw.

$$E_c Y_c V_{\sigma\nu} = Y_b \underline{M_{cb}} Y_c V_{\sigma\nu} = 0,$$

zu Antitensorprodukten und bringen sie auf die linke Seite:

$$(124a) \quad \bar{T}_{\sigma\nu} = -M_{\sigma\mu} V_{\nu\mu} + \frac{1}{4} \delta_{\sigma\nu} M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} + Y_{\nu} \Omega'_{\sigma}$$

entspricht dem durch das Zusatzglied $Y_{\nu} \Omega'_{\sigma}$ ergänzten Ansatz (108) (Grammel bezeichnet den ergänzten Ansatz mit S''), ihre Differenz

$$(124b) \quad T_{\sigma\nu} = -M_{\nu\mu} V_{\sigma\mu} + \frac{1}{4} \delta_{\sigma\nu} M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} + Y_{\sigma} \Omega'_{\nu},$$

dem durch $Y_{\sigma} \Omega'_{\nu}$ ergänzten Ansatz (109) (bei Grammel S'_c).²⁾

Die drei Grammelschen Ansätze sind daher vollständig gleichwertig und unterscheiden sich nur durch die Schreibweise. In (124) kommt die Symmetrie des Ansatzes unmittelbar zum Ausdruck, während dies in (124a) und (124b) nicht der Fall ist.

Ein anderer Weg für die Ermittlung des Spannungs-Energie-Tensors für ponderable Körper, welcher dem Sinne der sp. R. T. besser entspricht, besteht darin, daß man einen durch die Erfahrung bestätigten Ansatz für ruhende Körper „auf Bewegung“ transformiert. Dieser Weg ist aber schon für den Fall, daß die Bewegung parallel zu einer Achse des Ruhesystems angenommen wird, ziemlich umständlich; die dabei erhaltenen Ausdrücke für die Tensorbestimmungsgrößen gestatten auch keine eindeutigen Schlüsse auf anders gerichtete Bewegungen.

Die Viererkraft ist nach (119)

$$F_{\sigma} = \nabla_{\nu} \bar{T}_{\sigma\nu}.$$

Aus formalen Gründen wählen wir für $\bar{T}_{\sigma\nu}$ die Schreibweise (124a); bei der Ausführung der differentiellen Operation erhalten wir

$$(125) \quad F_{\sigma} = -M_{\sigma\mu} \nabla_{\nu} V_{\nu\mu} + Y_{\nu} \nabla_{\nu} \Omega'_{\sigma} + Z_{\sigma},$$

wobei

$$(126) \quad Z_{\sigma} = -V_{\nu\mu} \nabla_{\nu} M_{\sigma\mu} + \frac{1}{4} \nabla_{\sigma} (M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}).$$

Umformung von Z_{σ} . — Das erste Glied der rechten Seite von (126) läßt sich ähnlich wie im Abschnitt 16 der Ausdruck $-M_{\nu\mu} \nabla_{\nu} M_{\sigma\mu}$ auf die Form

$$-\frac{1}{2} V_{\mu\nu} \nabla_{\sigma} M_{\mu\nu}$$

bringen. Für die Umformung des zweiten Gliedes ziehen wir das innere Produkt

1) R. Grammel, l. c. p. 576, zweite Gleichung (31).

2) p. 576, dritte Gleichung (31).

$$H_{\alpha\beta\gamma} B_{\alpha\beta\gamma} = Y_{\alpha} V_{\beta\gamma} Y_{\alpha} M_{\beta\gamma}$$

heran; wenn wir $Y_{\alpha} V_{\beta\gamma}$ entwickeln, resultieren drei gleichwertige Summanden, so daß wir schreiben können:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta\gamma} B_{\alpha\beta\gamma} &= 3 Y_{\alpha} V_{\beta\gamma} Y_{\alpha} M_{\beta\gamma} \\ &= 3 Y_{\alpha} V_{\beta\gamma} Y_{\alpha} M_{\beta\gamma} + 3 Y_{\alpha} V_{\beta\gamma} Y_{\beta} M_{\gamma\alpha} \\ &\quad + 3 Y_{\alpha} V_{\beta\gamma} Y_{\gamma} M_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Im ersten Gliede dieser Entwicklung ist $Y_{\alpha} Y_{\alpha} = -1$ zu setzen, die beiden letzten Glieder sind gleich und lassen sich zu

$$-6 Y_{\beta} V_{\gamma\beta} Y_{\alpha} M_{\gamma\alpha} = -6 D_{\gamma} E_{\gamma}$$

zusammenfassen; wir erhalten dann die Beziehung

$$(127) \quad H_{\alpha\beta\gamma} \mu H_{\alpha\beta\gamma} = -3 V_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - 6 \varepsilon E_{\alpha} E_{\alpha}$$

und daraus

$$(128) \quad M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}^i = -2 \varepsilon E_{\alpha} E_{\alpha} - \frac{1}{3} \mu H_{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma}.$$

Das letzte Glied von (128) kann mit Einführung des Vierervektors H_{α} [vgl. (101)] auch in der Form

$$-2 \mu H_{\alpha} H_{\alpha}$$

geschrieben werden.

Die Gleichung (128) ermöglicht nun die Umformung des zweiten Gliedes von Z_{σ} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \nabla_{\sigma} (M_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}) &= -\frac{1}{2} E_{\alpha} E_{\alpha} \nabla_{\sigma} \varepsilon - \frac{1}{2} H_{\alpha} H_{\alpha} \nabla_{\sigma} \mu \\ &\quad - \varepsilon E_{\alpha} \nabla_{\sigma} E_{\alpha} - \frac{1}{6} H_{\alpha\beta\gamma} \nabla_{\sigma} (\mu H_{\alpha\beta\gamma}). \end{aligned}$$

In dem letzten Gliede des vorstehenden Ausdrucks ist μ bei der Differentiation als konstant zu betrachten. Aus (127) folgt weiter

$$- \varepsilon E_{\alpha} \nabla_{\sigma} E_{\alpha} - \frac{1}{6} H_{\alpha\beta\gamma} \nabla_{\sigma} (\mu H_{\alpha\beta\gamma}) = \frac{1}{2} V_{\alpha\beta} \nabla_{\sigma} M_{\alpha\beta},$$

welcher Ausdruck sich mit dem für das erste Glied von Z_{σ} erhaltenen weghebt. Es ist demnach

$$(126a) \quad Z_{\sigma} = -\frac{1}{2} E_{\alpha} E_{\alpha} \nabla_{\sigma} \varepsilon - \frac{1}{2} H_{\alpha} H_{\alpha} \nabla_{\sigma} \mu$$

und damit

$$(125a) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{\sigma} &= -M_{\sigma\mu} \nabla_{\nu} V_{\nu\mu} + Y_{\nu} \nabla_{\nu} \Omega'_{\sigma} - \frac{1}{2} E_{\alpha} E_{\alpha} \nabla_{\sigma} \varepsilon \\ &\quad - \frac{1}{2} H_{\alpha} H_{\alpha} \nabla_{\sigma} \mu. \end{aligned} \right.$$

Dies ist der vollständige Ausdruck der Viererkraft für beschleunigungsfrei bewegte isotrope Körper. Für homogene

Körper verschwinden die Erhöhungen $\nabla_\sigma \varepsilon$ und $\nabla_\sigma \mu$; es ist dann $Z_\sigma = 0$ und

$$(129) \quad F_\sigma = -M_{\sigma\mu} \nabla_\nu V_{\nu\mu} + Y_\nu \nabla_\nu \Omega'_\sigma.$$

Die Ausrechnung der Bestimmungsgrößen von F_σ in (125a) ergibt in gewöhnlicher Schreibweise die Ausdrücke:

$$(125b) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{(1,2,3)} &= \varrho \mathfrak{E}^* + \frac{1}{c} [\mathfrak{S} \mathfrak{B}] + \frac{1}{c} \left\{ (v \nabla) \mathfrak{B} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right\} \\ &\quad - \frac{x^2}{2} \left\{ \mathfrak{E}^{*2} - \frac{1}{c^2} (v \mathfrak{E}^*)^2 \right\} \nabla \varepsilon \\ &\quad - \frac{x^2}{2} \left\{ \mathfrak{H}^{*2} - \frac{1}{c^2} (v \mathfrak{H}^*)^2 \right\} \nabla \mu \\ F_4 &= \frac{i}{c} \left\{ \varrho (v \mathfrak{E}^*) + (\mathfrak{E} \mathfrak{S}) + \frac{1}{c} \left\{ (v, (v \nabla) \mathfrak{B}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (v \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}) \right\} + \frac{x^2}{2} \left\{ \mathfrak{E}^{*2} - \frac{1}{c^2} (v \mathfrak{E}^*)^2 \right\} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^2}{2} \left\{ \mathfrak{H}^{*2} - \frac{1}{c^2} (v \mathfrak{H}^*)^2 \right\} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right\}; \end{aligned} \right.$$

dabei ist nach (91), (98) und (122)

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [v \mathfrak{B}],$$

$$[\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} - \frac{1}{c} [v \mathfrak{D}],$$

$$\mathfrak{B} = [\mathfrak{D} \mathfrak{B}] - [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] + \frac{x^2}{c^2} v (v, [\mathfrak{D} \mathfrak{B}] - [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]).$$

Für homogene Körper verschwinden in (125b) die Gradienten $\nabla \varepsilon$ und $\nabla \mu$; für die zusammengefaßten Bestimmungsgrößen F_1 , F_2 und F_3 der Viererkraft resultiert dann der Ausdruck

$$F_{(1,2,3)} = \varrho \mathfrak{E}^* + \frac{1}{c} [\mathfrak{S} \mathfrak{B}] + \frac{1}{c} \left\{ (v \nabla) \mathfrak{B} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right\},$$

welchen auch Abraham abgeleitet hat.¹⁾

1) M. Abraham, l. c. p. 314.

**2. Spektrale Intensitätsverschiebung
und Schwächung der Jodfluoreszenz durch ein
magnetisches Feld;
von W. Steubing.**

Einleitung.

In einer kurzen Mitteilung¹⁾, die einige Zeit vor Ausbruch des Krieges erschien, gab der Verfasser Kenntnis von einem eigenartigen Effekt, den man beobachtet, wenn man fluoreszierenden Joddampf zwischen die Pole eines kräftigen Elektromagneten bringt. Es zeigt sich nämlich eine deutliche Intensitätsabnahme des Fluoreszenzlichtes, unabhängig von der Art der Anregung, die durch das kontinuierliche Spektrum einer Bogenlampe oder der Sonne, sowie durch einzelne Spektrallinien, z. B. von der Quecksilberlampe, erfolgen kann.

Im ersten Falle erhält man das bekannte Bandenspektrum des Joddampfes, im zweiten, als Teile desselben, bestimmte Linien oder Liniengruppen des nach R. W. Wood so benannten „Resonanzspektrums“.

Die Hauptergebnisse einer Reihe von vorläufigen Versuchen, die in der erwähnten Mitteilung zusammengefaßt waren, zeigten, daß das Phänomen nichts mit Zeemaneffekt zu tun hatte, daß es unabhängig von der Orientierung des Feldes war, ferner, daß merkbare Absorptionsänderungen nicht auftraten, endlich, daß analoge Wirkungen bei den Dämpfen anderer fluoreszierender Elemente nicht zu erhalten waren. Rohe photometrische Messungen, bei denen auf die spektrale Zusammensetzung des Fluoreszenzlichtes keine Rücksicht genommen war, ergaben für die beobachtete Schwächung eine maximale Intensitätsabnahme um ca. 35 Proz. bei einem Magnetfelde von ca. 14000 Gauss.

1) Verhandl. d. deutsch.-phys. Ges. 1913. p. 1181.

Inzwischen sind meine Versuche von R. W. Wood¹⁾, der sich das Studium der Jodfluoreszenz besonders zur Aufgabe gemacht hat, wiederholt worden. Wood stellte fest, daß er über einen erheblich kräftigeren Magneten verfügte, daß er bei einem Magnetfelde von 30000 Gauss eine Schwächung von 90 Proz. erhielt, wenn die Dampfdichte des Joddampfes auf 0° erniedrigt war, daß bei höherer Temperatur die Wirkung erheblich abnahm²⁾, und er schätzt das zur völligen Vernichtung der Fluoreszenz erforderliche Magnetfeld auf 50000 Gauss. Zahlreiche Versuche, zu einer Erklärung des Phänomens zu kommen, blieben ergebnislos und bestätigen im übrigen nur meine obigen Angaben über das Fehlen von Absorptionswirkungen und Einflüssen der Feldrichtung. Durch den Ausbruch des Krieges mußte ich zunächst meine weiteren Versuche aussetzen und konnte aus diesem Grunde erst später, unter erheblicher Verzögerung und mannigfachen Schwierigkeiten, die Arbeit beenden.

Hauptteil.

Um die beobachtete Erscheinung zu erklären bzw. auf *bekannte* Tatsachen zurückzuführen, bieten sich folgende Möglichkeiten dar:

I. Das Magnetfeld kann Änderungen in der Absorption hervorrufen, d. h. es kann erstens durch Steigerung der Absorption des anregenden Lichtes im Fluoreszenzgefäße eine Verminderung des Fluoreszenzlichtes eintreten, und zweitens durch Steigerung des Absorptionsvermögens für das Fluoreszenzlicht selbst, Absorptionswirkungen des Magnetfeldes also, die einzeln oder zusammen sowohl eine allgemeine Schwächung des Fluoreszenzlichtes wie eine Farbenänderung (durch Verschiedenheit des Absorptionsindex mit der Frequenz) hervorrufen könnten.

II. Das Magnetfeld kann den Dampfzustand des fluoreszierenden Dampfes ändern, da bekanntlich die Fluoreszenzhelligkeit und -befähigung eines Gases und Dampfes außer von dem Drucke bzw. der Temperatur auch von dem Molekular-

1) R. W. Wood. Philos. Mag. 1914. p. 1016 ff.

2) Daß ein eigentlicher Temperatureffekt hier nicht vorliegt, darüber vgl. p. 86—89.

zustande (Zahl, Art der fluoreszenzfähigen Moleküle) in hohem Grade abhängig ist.

Zur Prüfung dieser beiden Möglichkeiten wurden zunächst die eingangs angeführten Absorptionsversuche, die keine Änderung der Gesamtabsorption, weder für das erregende noch für das erzeugte Fluoreszenzlicht ergeben hatten, mit veränderter Anordnung, mit stärkeren Feldern und bei verschiedenen Dampfdichten wiederholt. Die Untersuchung bereitet insofern Schwierigkeit, als es nicht möglich ist, genügend ausgedehnte Felder von größerer Intensität zu verwenden, was wiederum nötig ist, um größere Schichtdicken bei niedrigen Dampfdrucken des Jods zu erhalten. Denn die weiteren Versuche ergaben, daß der Effekt mit abnehmender Dampfdichte zunahm. *Mit Sicherheit ging jedoch aus allen Versuchen hervor, daß auf Grund von Absorptionsänderungen eine Erklärung der Erscheinung nicht zu geben war.*

Die geringfügigen Variationen der Absorption in den verschiedenen Spektralbezirken mit verringerter Dampfdichte werden weiterhin — bei den Spektralaufnahmen — angeführt werden. Es sei als wichtig hervorgehoben, daß der Effekt auch bei spektraler Untersuchung nichts mit Absorptionserscheinungen zu tun hat, daß sich also das der Spektrallage nach im allgemeinen mit dem Absorptionsbandenspektrum identische Fluoreszenzbandenspektrum des Jods in Emission grundsätzlich verschieden von ersterem verhält, wenn es in einem Magnetfelde erzeugt wird. *Man hat es hier lediglich mit einem Emissionseffekte zu tun.*

Es war weiterhin zu prüfen, ob das Jod im Dampfzustande irgend besonderen magnetischen Einflüssen unterlag. Die bekannten magnetischen Konstanten des festen Jods ergaben keinerlei Besonderheiten vor anderen ähnlichen Körpern. Immerhin erschien es ratsam, zu versuchen, ob nicht etwa eintretende Dissoziation des Joddampfes oder Ähnliches im Magnetfelde zu beobachten war. Joddampf dissoziiert bekanntlich bei höheren Temperaturen erheblich, und da Versuche an anderen Elementen gezeigt haben, daß die Fluoreszenzfähigkeit eines Elementes an einen bestimmten Molekularzustand gebunden ist, wurden Versuche in dieser Richtung angestellt. Dazu sei noch hervorgehoben, daß Joddampf bei Zimmertemperatur lebhaft fluoresziert, daß aber bei höherer

Inzwischen sind meine Versuche von R. W. Wood¹⁾, der sich das Studium der Jodfluoreszenz besonders zur Aufgabe gemacht hat, wiederholt worden. Wood stellte fest, daß er über einen erheblich kräftigeren Magneten verfügte, daß er bei einem Magnetfelde von 30000 Gauss eine Schwächung von 90 Proz. erhielt, wenn die Dampfdichte des Joddampfes auf 0° erniedrigt war, daß bei höherer Temperatur die Wirkung erheblich abnahm²⁾, und er schätzt das zur völligen Vernichtung der Fluoreszenz erforderliche Magnetfeld auf 50000 Gauss. Zahlreiche Versuche, zu einer Erklärung des Phänomens zu kommen, blieben ergebnislos und bestätigten im übrigen nur meine obigen Angaben über das Fehlen von Absorptionswirkungen und Einflüssen der Feldrichtung. Durch den Ausbruch des Krieges mußte ich zunächst meine weiteren Versuche aussetzen und konnte aus diesem Grunde erst später, unter erheblicher Verzögerung und mannigfachen Schwierigkeiten, die Arbeit beenden.

Hauptteil.

Um die beobachtete Erscheinung zu erklären bzw. auf *bekannte* Tatsachen zurückzuführen, bieten sich folgende Möglichkeiten dar:

I. Das Magnetfeld kann Änderungen in der Absorption hervorrufen, d. h. es kann erstens durch Steigerung der Absorption des anregenden Lichtes im Fluoreszenzgefäße eine Verminderung des Fluoreszenzlichtes eintreten, und zweitens durch Steigerung des Absorptionsvermögens für das Fluoreszenzlicht selbst, Absorptionswirkungen des Magnetfeldes also, die einzeln oder zusammen sowohl eine allgemeine Schwächung des Fluoreszenzlichtes wie eine Farberänderung (durch Verschiedenheit des Absorptionsindex mit der Frequenz) hervorrufen könnten.

II. Das Magnetfeld kann den Dampfzustand des fluoreszierenden Dampfes ändern, da bekanntlich die Fluoreszenzhelligkeit und -befähigung eines Gases und Dampfes außer von dem Drucke bzw. der Temperatur auch von dem Molekular-

1) R. W. Wood. Philos. Mag. 1914. p. 1016 ff.

2) Daß ein eigentlicher Temperatureffekt hier nicht vorliegt, darüber vgl. p. 86—89.

zustande (Zahl, Art der fluoreszenzfähigen Moleküle) in hohem Grade abhängig ist.

Zur Prüfung dieser beiden Möglichkeiten wurden zunächst die eingangs angeführten Absorptionsversuche, die keine Änderung der Gesamtabsorption, weder für das erregende noch für das erzeugte Fluoreszenzlicht ergeben hatten, mit veränderter Anordnung, mit stärkeren Feldern und bei verschiedenen Dampfdichten wiederholt. Die Untersuchung bereitet insofern Schwierigkeit, als es nicht möglich ist, genügend ausgedehnte Felder von größerer Intensität zu verwenden, was wiederum nötig ist, um größere Schichtdicken bei niedrigen Dampfdrucken des Jods zu erhalten. Denn die weiteren Versuche ergaben, daß der Effekt mit abnehmender Dampfdichte zunahm. *Mit Sicherheit ging jedoch aus allen Versuchen hervor, daß auf Grund von Absorptionsänderungen eine Erklärung der Erscheinung nicht zu geben war.*

Die geringfügigen Variationen der Absorption in den verschiedenen Spektralbezirken mit verringerter Dampfdichte werden weiterhin — bei den Spektralaufnahmen — angeführt werden. Es sei als wichtig hervorgehoben, daß der Effekt auch bei spektraler Untersuchung nichts mit Absorptionserscheinungen zu tun hat, daß sich also das der Spektrallage nach im allgemeinen mit dem Absorptionsbandenspektrum identische Fluoreszenzbandenspektrum des Jods in Emission grundsätzlich verschieden von ersterem verhält, wenn es in einem Magnetfelde erzeugt wird. *Man hat es hier lediglich mit einem Emissionseffekte zu tun.*

Es war weiterhin zu prüfen, ob das Jod im Dampfzustande irgend besonderen magnetischen Einflüssen unterlag. Die bekannten magnetischen Konstanten des festen Jods ergaben keinerlei Besonderheiten vor anderen ähnlichen Körpern. Immerhin erschien es ratsam, zu versuchen, ob nicht etwa eintretende Dissoziation des Joddampfes oder Ähnliches im Magnetfelde zu beobachten war. Joddampf dissoziiert bekanntlich bei höheren Temperaturen erheblich, und da Versuche an anderen Elementen gezeigt haben, daß die Fluoreszenzfähigkeit eines Elementes an einen bestimmten Molekularzustand gebunden ist, wurden Versuche in dieser Richtung angestellt. Dazu sei noch hervorgehoben, daß Joddampf bei Zimmertemperatur lebhaft fluoresziert, daß aber bei höherer

Temperatur diese Fähigkeit abnimmt und erlischt, auch wenn die Dampfmenge annähernd konstant gehalten wird.

Indes verliefen die ganzen zeitraubenden Versuche, die ich hier unternahm (Prüfung auf Dissoziationswärme usw.), ergebnislos, und da sich im weiteren Verlaufe der Arbeit, besonders durch die spektralen Beobachtungen, mit Sicherheit ergab, daß die Wirkung des Magnetfeldes von ganz anderer Natur ist, als ich zunächst vermutete, so mag von der Wiedergabe der Einzelheiten abgesehen werden. Auch R. W. Wood hat in der erwähnten Abhandlung nach magnetischen Einflüssen auf den Dampfzustand gesucht — er vermutete ein Heraustreiben des Dampfes bei niedrigen Temperaturen aus dem Interferikum —, aber ebensowenig Erfolg dabei gehabt, was nach den im folgenden angegebenen Resultaten ohne weiteres verständlich ist, da er ebenso wie ich in obigen Versuchen die magnetische Beeinflussung in falscher Richtung suchte.

Eine andere Erklärung für die verminderte Fluoreszenz ist nur auf zweierlei Weise möglich, wenn man von dem Absorptionseinfluß, der — wie erwähnt — bei dem Effekte keine besondere Rolle spielt, absieht. Entweder nimmt die Intensität des Fluoreszenzlichtes ab, weil weniger fluoreszenzfähige Moleküle als Träger des Bandenspektrums vorhanden sind, oder aber, die Emission des einzelnen Moleküls wird gehemmt, so daß die Schwingungen aller fluoreszierenden Moleküle gleichmäßig, gewissermaßen wie im Zeemaneffekt, beeinflußt, d. h. in diesem Falle, geschwächt werden. Ist letzteres der Fall, so ist es wahrscheinlich, daß auch der Charakter des emittierten Spektrums eine Änderung erleidet. Jedenfalls ist ohne spektrale Untersuchung eine Entscheidung über eine solche Einwirkung unmöglich.

Es liegt nahe, zunächst nur an die erstere Möglichkeit zu glauben, zumal wenn man berücksichtigt, wie empfindlich die Fluoreszenz von Gasen gegen Beimischung fremder Gase oder Verunreinigungen ist. Es genügen unter Umständen geringe Zusätze besonders von elektronegativen Gasen, um die Fluoreszenz des betreffenden Dampfes zu verringern oder zu vernichten. Zu erwähnen ist dabei auch die Umwandlung des monochromatisch angeregten Resonanzspektrums in das bei kontinuierlicher Anregung erzeugte Bandenspektrum.

Ich erinnere an die bezüglichen Arbeiten von R. W. Wood und Franck, dem Verfasser u. a. In allen diesen Fällen kann man nur an eine Beeinflussung der fluoreszierenden Jodmoleküle durch Zusammenstöße mit den betreffenden Gasmolekeln denken, und soweit es sich um Verringerung der Fluoreszenzintensität und ihre Vernichtung handelt, ist sie zu verstehen durch Verringerung der Anzahl fluoreszierender Moleküle (d. i. durch Verlust ihrer Fähigkeit, das betreffende Spektrum zu emittieren unter Wirkung der molekularen elektrischen Felder o. ä.) und auch wohl ausnahmslos von allen Autoren in diesem Sinne gedeutet worden.

Da alle bisherigen Versuche keinerlei Anhaltspunkte gaben, die Abnahme des Fluoreszenzlichtes zu erklären durch Änderungen im Dampfzustande, d. i. durch verringerte Zahl fluoreszierender Moleküle sowie durch geänderte Absorption, wurde zur genaueren spektralen Untersuchung des Fluoreszenzlichtes im magnetischen Felde geschritten.

Es war zu prüfen:

1. Die Abhängigkeit der Fluoreszenzschwächung von der spektralen Lage und bei verschiedenen magnetischen Feldstärken.

2. Die Abhängigkeit der Fluoreszenzschwächung bei bestimmten magnetischen Feldern von der Dampfdichte.

3. Etwa vorhandener Einfluß der Temperatur neben der Dampfdichte (gesättigter und überhitzter Dampf).

4. Abhängigkeit der Fluoreszenzschwächung von der Art und Stärke des erregenden Lichtes (normales Bandenspektrum und Resonanzspektrum).

5. Änderungen in der Struktur und Lage des Fluoreszenzspektrums bei variiertem Felde und variiertem Dampfdichte.

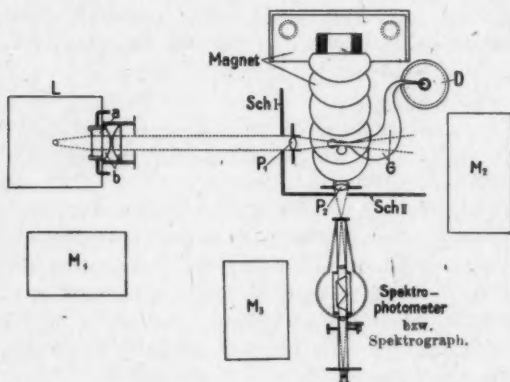
Nebenbei schien es wünschenswert, den etwa außer dieser Erscheinung auftretenden Zeemaneffekt, und da inzwischen Hr. Stark seine Methode des elektrischen Feldes in leuchtenden Gasen und Dämpfen mit so schönem Erfolge angewendet und ausgearbeitet hatte, nach vorhandenem Einfluß eines elektrischen Feldes statt des magnetischen auf die Fluoreszenz des Joddampfes zu suchen. Letzterer schien mir um so mehr zu erwarten, als ja die Wirkung molekularer elektrischer Felder auf die fluoreszierenden Moleküle bei Zusammenstößen beobachtet war.

Spektrale Untersuchung der magnetischen Schwächung des Fluoreszenzlichtes.

Zur spektralphotometrischen Untersuchung kam die subjektive Beobachtung und die spektrographische Messung zur Anwendung. Auf Energiemessungen mit Thermosäule, Bolometer oder lichtelektrischer Zelle wurde mangels genügender Empfindlichkeit nach Anstellung von Probeversuchen verzichtet.

Versuchsanordnung.

Der für subjektive und objektive Messungen gleiche Aufbau erhellt aus folgendem Schema (Fig. 1). Darin bedeuten *L* das lichtdichte Gehäuse, in dem die Lichtquelle stand,



Gründriß der Versuchsanordnung

Fig. 1.

A den von fließendem Wasser durchströmten Wärmefilter und *B* den Kondensator. *M* bedeutet den Magneten, der vertikal montiert war (Feld-senkrecht verlaufend). Zwischen den Polen befand sich das evakuierte, mit Joddampf gefüllte Gefäß *G*, dessen U-förmig endendes Schwanzstück in die Dewarflasche *D* tauchte. *P*₁ und *P*₂ sind Projektionslinsen, deren erste das Erregungslicht im Jodgefäße genau im Interferikum konzentrierte, deren zweite den Fluoreszenzkegel auf den Spalt des Spektralphotometers bzw. Spektrographen

scharf abbildete. M_1 , M_2 , M_3 sind die zur Regulierung und Kontrolle dienenden Widerstände und Meßinstrumente bei Lichtquelle, Magnet und Spektrophotometer. Überflüssiges Licht wurde durch die Schirme Sch_1 und Sch_2 abgeblendet, deren Öffnungen gerade groß genug waren, um den Erregungslichtkegel und das Abbildungsbüschel durchzulassen.

A. Die Lichtquellen.

Zur kontinuierlichen Erregung konnte das Sonnenlicht wegen der Lage des Arbeitsraumes und der Ungunst der Aachener Witterungsverhältnisse nicht verwendet werden. Statt dessen wurde teils der Kohlebogen, teils eine neuerdings von der Osramgesellschaft hergestellte Halbwattprojektionsglühlampe von 4000 HK. benutzt. Letztere hat bei dem Vorteil konstanten Brennens den Nachteil geringerer Intensität und schwieriger Herstellung eines guten Strahlenganges, wegen der größeren Flächenausdehnung der Leuchtquelle (als Leuchtquelle diente eine im Zickzack gewundene Drahtspirale innerhalb eines Rechteckes von ca. $2 \times 2,5$ cm Fläche). Infolge dieser geringen Intensität waren die Ablesungsfehler bei den spektralphotometrischen Messungen reichlich doppelt so groß wie bei Anregung mit Bogenlicht, und in lichtärmeren Teilen des Bandenspektrums oder solchen, wo die Augenempfindlichkeit zu gering ist (rot), waren die okularen Messungen kaum durchführbar. Auf spektrographische Aufnahmen damit wurde wegen zu großen Expositionszeiten, die bedeutende Fehlerquellen in sich schließen, verzichtet. — Mit der selbstregulierenden Bogenlampe wurde eine befriedigende Konstanz erzielt (vgl. die diesbezüglichen Angaben von Hallwachs¹⁾ zur Erzielung konstanten Bogenlichtes). Immerhin störten bei den subjektiven Beobachtungen gelegentliche Zuckungen — wohl veranlaßt durch Unreinigkeiten oder Fehler der Kohlen —, weil sie die Augenempfindlichkeit beeinflussten, sogar wenn als Vergleichslicht die Lampe selbst geeignet abgeblendet herangezogen wurde. Um absolute Konstanz der Stromquellen zu haben, wurde in der Hauptsache der Strom den Institutsbatterien, die anderweitig nicht in Anspruch genommen waren, entnommen und die Messungen in späten

1) W. Hallwachs, Phys. Zeitschr. 5. p. 489.

Abend- und Nachtstunden durchgeführt. Bei den subjektiven Versuchen kontrollierte ein zweiter Beobachter die Meßinstrumente.

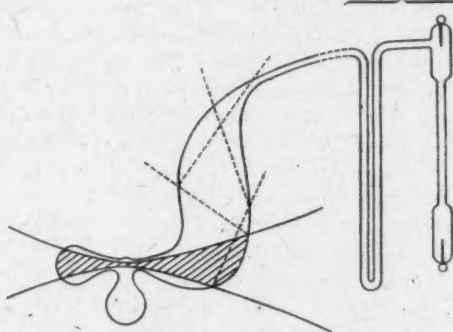
Zur monochromatischen Erregung diente eine Quarz-Quecksilberlampe von Heraeus, die zur Projektion mit Längsdurchsicht aufgestellt wurde. Ein an die Lampe ge-
paßter Metallschirm, der nur die Endfläche des horizontalen Leuchtrohres freiließ, ermöglichte die Projektion ohne Nebenbilder. Indes gelang es nicht — zum Unterschied zu den oben erwähnten Lichtquellen — zerstreutes Licht ganz auszuschließen. Zur Erzielung genügender Helligkeit mußte eine besonders große Kondensorlinse verwendet werden, die in dem engwandigen Gefäße störendes Nebenlicht erzeugte. Doch spielen geringe Beträge bei Aufnahme des spektral zerlegten Fluoreszenzlichtes keine Rolle, da das Resonanzspektrum aus Linien von anderer Wellenlänge besteht, abgesehen von denjenigen, in denen das Spektrum angeregt wird. (Bei Quecksilber λ 5461 bzw. 5270 und 5791). In diesen Linien selbst jedes zerstreute Licht zu beseitigen, scheint kaum möglich zu sein, da auch R. W. Wood besonders hervorhebt, es sei ihm bei seinen Versuchen am Resonanzspektrum nicht gelungen — Versuche, bei denen nicht wie hier durch den geringen Polabstand des Magneten ein Gefäß von bestimmten engen Dimensionen vorgeschrieben wurde. Ich mußte daher bei Intensitätsvergleichen im Resonanzspektrum diese intensivsten Linien ausschließen. — Eine große Empfindlichkeit der Quarzlampe gegen Zugluft, die mir auffiel, veranlaßte mich, sie sorgfältig dagegen zu schützen, um konstante Belastung zu haben.

B. Das Joddampfgefäß.

Gewählt wurde für die Untersuchung im Magnetfelde ein Gefäß von anderer Form, als sie in meiner ersten Arbeit beschrieben wurde, um das zerstreute Licht möglichst ganz auszuschließen. Bei der früher gewählten Kreuzform mit Abschlußkugeln wurde ein erheblicher Teil des Bogenlichtes an der hohlspiegelartig wirkenden Rückwand beim Austritt aus dem Gefäße zurückgeworfen. Daher wurde bei der neuen Form die Austrittswandung des Gefäßes schräggehend — sackartig — angefertigt, so daß die Zurückwerfung des Lichtes nach der Seite hin erfolgte.

Fig. 2 zeigt die ohne weiteres wohlverständliche Form des Rohres; der Strahlengang ist punktiert angedeutet. So erschien bei genauer Justierung der Fluoreszenzkegel völlig auf dunklem Hintergrunde, wenn in der Spektroskoprichtung beobachtet wurde. Die Probe wurde auch spektrographisch vorgenommen, indem mit weitgeöffnetem Spalt und doppelt als normal benutzter Expositionszeit Aufnahmen gemacht

Um 90° nach unten gedreht zu denken



Joddampfgefäß von oben gesehen

Fig. 2.

wurden, während der Joddampf durch Kohlensäureschnee kondensiert war. So ließ sich das Fehlen störenden Lichtes, das die Resultate im Spektrographen hätte fälschen können, einwandfrei nachweisen. Die beiden Kugeln am Eintritt des Beleuchtungskegels und in der Beobachtungsrichtung als Fenster waren fast schlierenfrei geblasen und von nahezu gleicher Größe; ihre Dimensionen wie auch die des Gefäßes sind aus der Figur zu entnehmen.

Die sackartige Erweiterung endete in einem U-Rohre, das in den Hals einer Dewarflasche führte. Ein seitlicher Ansatz trug endlich noch ein kleines Geisslerrohr, um das abgeschmolzene Gefäß von Zeit zu Zeit auf Reinheit und Güte des Vakuums bei kondensiertem Jod zu prüfen. Im Gefäße befand sich ein Überschuß von Jod, so daß bei jeder Temperatur Sättigung gesichert war. Das Jod selbst war reinstes, durch Resublimation gewonnen (bezogen von Kahlbaum, Berlin) und zuvor noch durch mehrfache Sublimation

im Vakuum von mir gasfrei gemacht (wegen der Hygroskopie des Jods stets notwendig). Um stundenlang konstante Dampfdrucke im Jodgefäße erhalten zu können, wurde der U-Ansatz in der Dewarflasche von großem Inhalte in ein Wasserbad getaucht, dessen Temperatur an einem $\frac{1}{10}^{\circ}$ -Thermometer abgelesen wurde.

C. Der Magnet.

Da mir Hr. Geheimrat Grottrian in liebenswürdiger Weise den großen Halbringmagneten von Hartmann & Braun des Elektrotechnischen Instituts für die Untersuchung zur Verfügung stellte, konnte ich bei einem größeren Interferrikum (ca. 7 mm), wie es das Joddampfgefäß erforderte, bis zu Feldern von ca. 22000 Gauss gelangen. Um gleichzeitig bequem den Beleuchtungskegel in das Gefäß bringen und den Fluoreszenzkegel beobachten zu können, da ferner, wie eingangs erwähnt, die Feldrichtung keinen merkbaren Einfluß auf die Schwächung der Fluoreszenz hat, wurde der Magnet vertikal so aufgestellt, daß das oben beschriebene Jodgefäß horizontal durchstrahlt wurde und rechtwinklig zur Beleuchtungsrichtung gemessen werden konnte. Das Feld verlief also parallel zur Spaltrichtung des Spektroskopes bzw. Spektrographen. Ein kräftiges Messinggestell hielt zwischen seinen Säulen das Jodgefäß in richtiger Lage und fixierte den Polabstand des Magnetes. Die Pole hatten die übliche Form eines abgestumpften Kegels von ca. 120° . Durchmesser des Kegeldeckels ca. 6 mm. Vor und nach beendeten Versuchen wurden die Feldstärken in diesem Interferrikum für die benutzten Stromstärken mittels Wismutspiralen (bei richtiger Temperatur) und Induktionsspulen bestimmt. Bei den langfristigen Expositionszeiten wurde über eine Feldstärke von 20000 Gauss nicht hinweggegangen, um keine unzulässige Erhitzung zu bekommen.

D. Spektralphotometer.

Das benutzte Spektralphotometer war besonders zu Meßzwecken an sehr lichtschwachen Objekten von der Firma F. Schmidt & Haensch, Berlin, nach Angaben von J. Stark gebaut und unterscheidet sich insofern von den meisten üblichen Spektrophotometern, als der Apparat aus zwei vollständig

getrennten Teilen besteht, die für sich verwendbar sind, nämlich dem großen, recht lichtstarken Geradsichtspektroskope, auf dem abnehmbar der eigentliche Photometrierapparat sitzt, der die Vergleichsquelle — ein Glühlämpchen in Kugel — und die Abschwächvorrichtung enthält. Ein ganz ähnlicher Apparat, erbaut von der gleichen Firma, ist seinerzeit von F. von Hauer und J. von Kowalski in der Physikalischen Zeitschrift 1914, p. 322, beschrieben worden, und die dortige Abbildung Fig. 1b entspricht völlig dem hier verwendeten Apparate. Der einzige Unterschied besteht darin, daß das Spektrophotometer der genannten Autoren die Lichtschwächung in bekannter Weise durch drehbare Nikols bewirkt, während an dem von mir benutzten Instrumente die Abschwächung durch eine große, exakt gearbeitete Irisblende erfolgt, die eine Teilung direkt nach Lichtmengen trug. Da der Apparat noch nicht in Gebrauch gewesen war, schien es erforderlich, ihn auf Zuverlässigkeit, Genauigkeit der Ablesungen und besondere Fehler zu prüfen. Dies geschah auf der optischen Bank des Instituts durch Messung mit geeichten Lichtquellen mit Abstandsphotometrie. Ich fand, daß die Meßvorrichtung recht gleichmäßig arbeitete. Auch ein „toter Gang“ der Irisblende war nicht festzustellen. Da die Genauigkeit der Einstellung bei großen und kleinen Blendenwerten geringer ist, verlegte ich die Messung durch entsprechende Regulierung der Glühbirne in das Gebiet sicherster Ablesung. Die als Vergleichsquelle dienende kleine Glühbirne lag während der Untersuchungen, die, wie eingangs erwähnt, in späten Abend- und Nachtstunden vorgenommen wurden, an der 10-Volt-Batterie des Instituts von 300 Amperestunden Kapazität. Während dieser Zeit wurde die Batterie anderweitig nicht gebraucht. Zur Kontrolle war ein Präzisionsvoltmeter parallel zur Lampe geschaltet. Die Regulierung wurde — da die gewöhnlichen Schieberheostaten wegen schlechter Kontakte hierzu nicht verwendbar sind — mit einem besonders hierzu verfertigten Drahtwiderstand vorgenommen, der beliebig feine Verschiebung erlaubte und mit festschraubbaren Kontakten störungsfrei arbeitete.

Die Eichung des Spektrophotometers auf Wellenlängen geschah in bekannter Weise mittels einer Heliumröhre.

E. Der Spektrograph.

Die photographischen Aufnahmen wurden mit einem Apparate gemacht, der von dem Institutsmechaniker E. Feldhausen nach meinen Angaben gebaut wurde. Des Hauptgewicht bei dem Bau war dabei auf große Lichtstärke und leicht veränderliche Optik gelegt. Der Spektrograph, dessen Grundriß aus nachstehender Figur zu ersehen ist, war im Prinzip einem Spektrometer nachgebildet. Sein Gesamtgewicht dürfte ca. 110 kg betragen. Das schwere gußeiserne

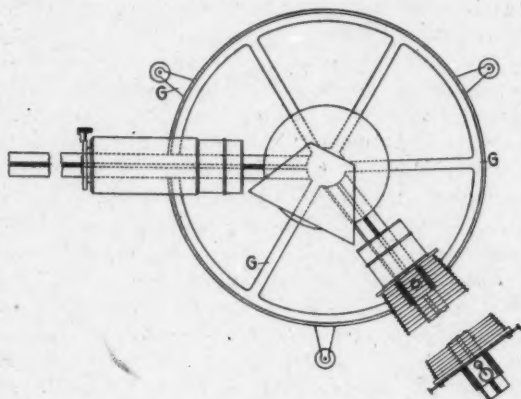


Fig. 3.

Grundgestell *G* von 80 cm Durchmesser ruht auf drei in der Höhe verstellbaren Fußschrauben, die eine leichte Horizontalstellung und Höhenregulierung vor dem Untersuchungsobjekte ermöglichen. Der Kollimatorarm mit dem Grundgestell fest verbunden, trägt eine solide, schlittenartige Führung, auf der der Kollimator selbst sowie zwei Stative zum Halten von Projektionslinsen oder anderen Nebenapparaten in Richtung der optischen Achse verschoben werden können. Der Dispersionskörper ruht auf einem sorgfältig justierten, in der Höhe beliebig einstellbaren Spektrometertisch, dessen 25 cm große Platte sich gegen eine kleinere mit drei Regulierschrauben auswechseln läßt, und der Kameraarm von nahezu 1 m Länge läßt sich unter jedem beliebigen Winkel gegen die Kollimator-

achse am Grundgestelle festklemmen. Ein Teilkreis mit Noniusablesung auf 6 Minuten gestattet die Festlegung des Winkels um eine gegebene Einstellung rasch wechseln zu können. Der Kameraarm besitzt gleichfalls eine Längenteilung in Millimetern um die Lage von Objektiv- und Kameraträger, ihre gegenseitigen Abstände usw. bestimmen zu können. Die Träger sind gegeneinander leicht in der Schlittenverschiebung beweglich. Eine bequeme Feinverschiebung am Kassettenträger erlaubt rasche Scharfeinstellung mit dem Auge und photographisch durch den Nonius auf der Längenteilung. Objektiv- und Kameraträger sind lichtdicht durch leicht auswechselbare Balgen verbunden. Der Kameraträger gestattet die Verwendung dreier Plattenformate (13:18, 9:12, 6:9). Eine Vertikalverschiebung zu Serienaufnahmen auf derselben Platte ist vorhanden. Ein dritter im Bedarfsfalle einzusetzender Träger zwischen Kameraobjektiv und Kassettenträger ermöglicht das Einsetzen eines Teleobjektives, wodurch sich die Normalbrennweite des Kameraobjektives (also die lineare Ausdehnung des Spektrums) nötigenfalls um das Fünffache verlängern ließe. Der Kollimator — als Ganzes in seiner Führung beweglich — besitzt einen unsymmetrischen Spalt mit exakter Trommel, deren Teile 0,0025 mm angeben. Unmittelbar hinter dem Spalt sitzt ein Compoundsektorenverschluß der Firma Deckel in München, wohl der zurzeit exakteste aller regulierbaren Objektivverschlüsse (zwischen 1 und $\frac{1}{250}$ Sek.). Als Kollimator- und Kameraobjektiv verwendete ich die lichtstärksten Tessare von Zeiss von 30 cm Brennweite und Öffnungsverhältnis 1:3,5. Sie besitzen gerade als Spektrographenobjektive große Vorteile. Der geringe Bildwinkel, der sie in der Praxis mehr als Porträtobjektive empfiehlt, schadet am Spektrographen, wo man stets nur kleine Winkel im Spektrum umfaßt, gar nicht; hinsichtlich ihrer astigmatischen und chromatischen Korrektion, auf welche es besonders beim Kollimatorobjektiv ankommt, werden sie von keinem anderen Typ übertroffen; ihr einziger Nachteil, der bei ihrer Lichtstärke unvermeidbar ist, ist eine größere Blendendifferenz, d. h. bei voller Öffnung liegt die größte Bildschärfe näher dem Objektiwscheitel wie bei Abblendung auf etwa $F:9$ unter Ausschaltung der Randstrahlen. Um die hierfür nötige Korrektion der Brennweite bei geblendetem

Objektive rasch vornehmen zu können, besitzt das Kollimatorrohr noch eine mikrometrische Verschiebung, die sichere Veränderung des Abstandes auf $\frac{1}{100}$ mm genau gestattet. Als Dispersionskörper dient ein großes Compoundprisma (sog. Rutherfordprisma) von 75 mm Höhe, 185 mm Länge der brechenden Flächen, geliefert von der Firma R. Fues, Berlin. Mit ihm kommt die Lichtstärke des Spektrographen gut zum Ausdruck. Um aber für die langwelligen Teile des Spektrums mit größerer Dispersion arbeiten zu können, ist die Auswechselbarkeit gegen ein Plangitter vorgesehen. Da mir ein solches hier nicht zur Verfügung stand, auch nicht anderweitig zu erhalten war, verwendete ich für die Gitteraufnahmen ein Wallace-Kopiegitter, bezogen durch Karl Zeiss, Jena, das ich nach einem von Gehrcke und Reichenheim¹⁾ erprobten Verfahren durch Kathodenzerstäubung von Platin in ein gut brauchbares Reflexionsgitter verwandelte. Das Gitter, praktisch nahezu geisterfrei, hatte infolge seiner hohen Strichzahl (25000 lines to the inch) gute Dispersion und in der ersten Ordnung gute Helligkeit. Freilich war es — schon infolge der kleinen Gitterfläche — (30×50 mm geteilte Fläche) viel lichtschwächer als das Prisma und kam nur für lichtstärkere Objekte zur Untersuchung in Frage. Gitter und Prisma sind leicht auswechselbar auf dem Spektrographentisch zu montieren und durch passende Blechgehäuse lichtdicht mit Kollimator und Kamerateil zu verbinden. Endlich sei bemerkt, daß sowohl beim Kollimator- wie Kameraobjektiv geeignete Einsätze vorhanden sind, um mit anderen Objektiven, evtl. auch mit Quarzoptik, den Apparat benutzen zu können. Ein Schieber, der an Stelle der Kassetten im Kassettenträger eingeschoben werden kann, in den verschiedene Okulare — auch ein Okularspalt — gesetzt werden können, dient zu okularen Beobachtungen im Spektrum. Zur Projektion der Lichtquelle auf den Spalt ist eine aplanatische, photographisch korrigierte Lupe von Steinheil mit dem Öffnungsverhältnis 1:2 bestimmt; denn nur mit einem entsprechend lichtstärkeren Objektiv ist es natürlich möglich, die große Lichtstärke von $F:3,5$ des Kollimators auszunutzen und diesen bei der Projektion auf den Spalt einigermaßen zu füllen.

1) E. Gehrcke u. Reichenheim, Verhandl. d. deutsch.-phys. Ges. 1909, p. 311.

F. Die spektrophotometrischen Messungen.

Wie p. 59 bemerkt, galt es zunächst, den Verlauf der Fluoreszenzschwächung bei verschiedenen Feldern in den einzelnen Spektralbezirken festzustellen.

Nach sorgfältigster Justierung (= engste und hellste Stelle des Fluoreszenzkegels in der Mitte zwischen den Polschuhen, genaue zentrale Abbildung dieser Stelle auf den Spalt des Spektrophotometers) wurde die Glühbirne des Photometers abgestimmt auf maximale Helligkeit des im Apparate erhaltenen Fluoreszenzlichtes durch den Vorschaltwiderstand, alsdann die Weite von Objektiv- und Okularspalt so eng genommen, wie es die zur Messung notwendige Helligkeit erlaubte, auf den für das Auge hellsten Spektralbezirk im Apparate (gelbgrün) eingestellt und bei konstant gehaltener Erregungsintensität, Vergleichslichtquelle und Dampfdichte photometriert.

Über ersteres ist das Nötige angeführt. Für die konstante Dampfdichte sorgte ein Wasserbad in der Dewarflasche, dessen Temperatur stundenlang auf $2/10^{\circ}$ konstant blieb, falls die Temperaturdifferenz zwischen Zimmer und Wasserbad nicht erheblich war. In letzterem Falle wurde für rechtzeitige Erneuerung des Bades gesorgt. Die Mehrzahl der Messungen fand bei Zimmertemperatur statt, d. h. Wasserbad ca. 1° C unter der letzteren. Die Dispersion des Spektroskops ist groß genug, um die einzelnen Banden des Spektrums getrennt erkennen zu lassen, aber die Helligkeit einer einzelnen Bande nicht genügend, um einen so schmalen Bezirk photometrieren zu können. Der im Gelbgrün gemessene Bezirk umfaßte ca. 140 A.-E., d. h. ungefähr die Banden von λ 5350 λ bis 5490. Der Objektivspalt hatte dabei 0,8 mm Weite.

Da die einzelnen Banden in diesem Bezirke annähernd gleiche Helligkeit besaßen, bereitet eine Photometrierung dieser verwaschen aussehenden Banden (infolge der Spaltweite) gegen das entsprechende Stück kontinuierlichen Spektrums der Glühbirne keine Schwierigkeit, wenn nur die Justierung zuvor so erfolgt ist, daß Vergleichsspektrum und Bandenspektrum eng nebeneinander liegen. Während ich persönlich, um mit ausgeruhtem Auge ungeblendet photometrieren zu können, nur die Einstellung der Photometrierblende besorgte, las ein zweiter Beobachter die Zahlenangabe der Blende ab und kontrollierte die einzelnen Meßinstrumente.

Die Messungen selbst wurden in der Weise durchgeführt, daß zunächst eine Reihe Ablesungen bei ungeschwächter Fluoreszenz vorgenommen wurden, alsdann nach Einschaltung des Magnetstromes für wachsende Felder um ca. 2500 Gauss steigend bis zum Maximalwerte von 22000 Gauss. Bei jeder Feldstärke wurden mindestens fünf Ablesungen gemacht. Vom Höchstwerte rückwärts in derselben Weise bis zum Magnetstrom 0. So kontrollierte die zweite Meßreihe stets die erste. In dieser Art wurden an aufeinanderfolgenden Tagen eine Reihe von Messungen bei verschiedenen Temperaturen zwischen 17° und 23° C vorgenommen, die gleiches Ergebnis hatten.

Es folgte aus ihnen, daß die Lichtabnahme nicht proportional der Feldstärke erfolgte, wenn man das Intensitätsverhältnis in Abhängigkeit der Feldstärke graphisch eintrug, sondern nach einer Exponentialfunktion, was am deutlichsten hervortritt, wenn man die Fluoreszenzschwächung als log. Lichtmenge-Feld aufträgt. Vgl. Fig. 4, Kurve a (ausgezogene Linie).

Die Messungen bei den verschiedenen oben angeführten Temperaturen scheinen sich zu decken. Die Meßfehler sind jedenfalls zu groß, um Unterschiede erkennen zu lassen. Anders bei 0° im Dewargefäß, also bei wesentlich geringerer Dampfdichte. Leider war indes die Fluoreszenzhelligkeit zu gering, um bei verschiedenen Feldern mit genügender Sicherheit messen zu können. *Es ergab sich nur, daß der Mittelwert der einzelnen Ablesungen erheblich tiefer lag wie bei gleich starkem Felde bei höherer Temperatur (über 15° C).*

Als zweiter Punkt war die Abhängigkeit der Schwächung von der Wellenlänge festzustellen. Wie erwähnt, waren in benachbarten Banden keine Intensitätsunterschiede beim Einschalten des Feldes zu bemerken; da nach kürzeren Wellen die Intensität rasch abklingt, blieb nur die Möglichkeit, im hellsten Teile des Rot zu messen. Wie die späteren Spektrogramme zeigen, ist hier die relative Intensität des Fluoreszenzspektrums sogar erheblich größer wie im Gelbgrün, die Empfindlichkeit des Auges aber soviel geringer, daß die Einstellung auf gleiche Helligkeit viel unsicherer wird.

Es fanden sich aber übereinstimmend nach den einzelnen Meßreihen Werte, die im Rot eine weit geringere Schwächung ergaben, bei sonst analogen Bedingungen wie im Gelbgrün. (In

Fig. 4, Kurve b sind Anfangs- und Minimalwert der Fluoreszenzhelligkeit als punktierte Kurve eingetragen).

Da größere Genauigkeit wegen der auf p. 61 erwähnten Schwierigkeit nicht zu erzielen war, die Untersuchung des dritten Punktes: Einfluß der Temperatur neben der Dampfdichte, aus diesem Grunde aussichtslos war und ich von der Konstanz der Halbwattprojektionslampe größere Genauigkeit erhoffte, wurden die Meßreihen zunächst bei derselben Temperatur mit ihr wiederholt. Über die Nachteile dieser Messung

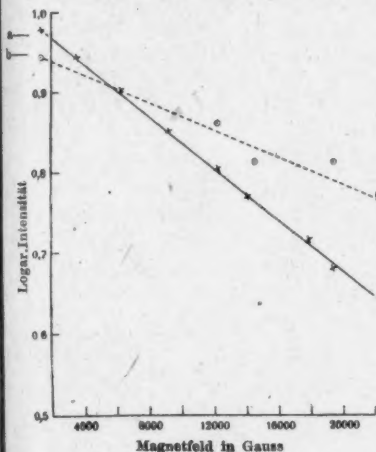


Fig. 4.

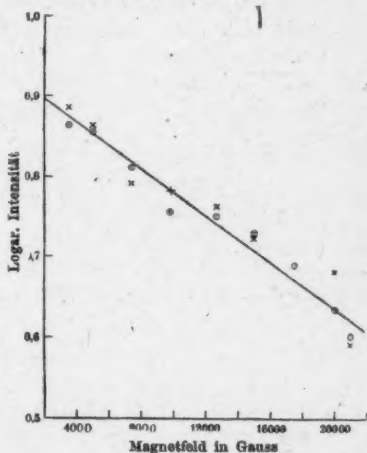


Fig. 5.

ist ebenfalls p. 61 gesprochen. Überraschenderweise ergaben zahlreiche Versuchsreihen zwar das gleiche Resultat, daß die Schwärzung sich gleichfalls am besten durch eine geradlinige Kurve log. Intensität-Feldstärke darstellen ließ, daß aber die Kurve bei sonst gleichen Bedingungen flacher geneigt war wie bei den Messungen mit Bogenlicht (bezogen auf gleiche Wellenlängenbezirke und gleiche Magnetfelder).

Dieser Neigungsunterschied der Kurve würde bedeuten, daß die Fluoreszenz mit einer spezifisch schwächer leuchtenden Lichtquelle, wie sie die Glühbirne gegenüber dem Bogenlicht darstellt, dem schwächenden Einflusse des Magneten in geringerem Grade unterliegt.

Als Beispiel sind zwei Messungen mit der Halbwattprojektionslampe eingetragen, deren eine bei 23° C, deren andere bei 24° im Wasserbade aufgenommen wurden, während die Zimmertemperatur im ersten Falle 25° , im zweiten 27° betrug (Fig. 5).

Der gemessene Spektralbezirk umfaßt das gleiche Intervall wie bei Kurve 4a. Wie man sieht, schwanken die aus je vier Ablesungen gebildeten Mittelwerte infolge der angeführten Meßschwierigkeiten so erheblich, daß eine genauere Festlegung der Kurve unmöglich ist. Da die Meßfehler ihrerseits durch die Schwäche des Lichtes bzw. die Empfindlichkeitsgrenze des Auges bedingt sind, war es ausgeschlossen, etwa Messungen mit dieser Lampe in anderen Spektralbezirken und bei niedrigeren Dampfdrucken des Jod, also bei niedrigeren Temperaturen, anzustellen, in denen die Fluoreszenzhelligkeit wesentlich geringer ist.

Es kann aber keinem Zweifel unterliegen, wenn man die Messungen mit Bogenlicht als Anregung und die mit der Halbwattlampe vergleicht, daß zwischen beiden ein systematischer Unterschied besteht, und man müßte den Resultaten Zwang antun, wollte man z. B. die Kurve 4a (Bogenlichtmessung) mit Kurve 5 (Halbwattlampe) gleichlaufend ziehen.

Es machte mir viel Schwierigkeiten, eine Erklärung für diesen auffälligen Unterschied im Gange beider Messungen zu finden, da die Meßmethoden und -apparate die gleichen waren und ein prinzipieller Fehler nicht auffindbar war. Daß tatsächlich nicht in Versuchsfehlern, sondern in der verschieden starken Beleuchtungsintensität beider Lichtquellen die Ursache lag, weil dadurch das Magnetfeld im einen Falle einen geringeren Effekt auf die fluoreszierenden Moleküle ausübt, wurde durch die späteren spektrographischen Versuche sicher gestellt.

Mit der Quecksilberlampe als Erregungsquelle im Spektrophotometer Messungen durchzuführen, war unmöglich, da die meisten Resonanzlinien zu lichtschwach waren, ferner das kontinuierliche Spektrum der Glühbirne zum Vergleich nicht geeignet ist.

Als Ergebnis der spektrophotometrischen Messung bleibt bestehen:

1. Der Logarithmus der Fluoreszenzlichtmenge nimmt proportional dem Magnetfelde ab.

2. Die Fluoreszenzabnahme ist im Gelbgrün des Spektrums stärker als im Rot.

3. Die Fluoreszenzschwächung zeigt in Temperaturintervallen zwischen 15° und 25° keine Änderung mit Temperatur und Dampfdichte; stärkere Schwächung ist bei 0° bemerkbar.

4. Die Fluoreszenzschwächung ist stärker bei Anregung der Fluoreszenz mit Bogenlicht als mit der 4000kerzigen Halbwattprojektionslampe.

G. Spektrographische Aufnahmen.

Die spektrographischen Aufnahmen wurden in der gleichen, p. 60 skizzierten Versuchsanordnung gemacht, indem der gleichfalls sorgfältig justierte Spektrograph an die Stelle des Spektrophotometers trat. — Der Apparat war zuvor unter Benutzung des Rutherfordprismas so eingestellt worden, daß er maximale, gleichmäßige Helligkeit in dem zur Untersuchung bestimmten Spektralbezirke besaß, d. h. von ca. λ 5000 bis 6000 A.-E. Außerdem wurde die Dispersion durch Drehen des Prismas aus der Minimumstellung so weit gesteigert, als dies ohne große Schädigung der optischen Abbildungsschärfe und -helligkeit zu erreichen war. Die Dispersion betrug bei der gewählten Einstellung: 2,5 A.-E. pro 0,1 mm.

Besonderer Wert wurde auf geeignetes Plattenmaterial gelegt. Da es sich bei diesen Aufnahmen einmal um sehr lichtschwache Spektren handelte, außerdem es besonders auf das Studium spektraler Intensitätsunterschiede ankam, war es erforderlich, eine Platte zu wählen, die neben hoher Allgemeinempfindlichkeit das ganze untersuchte Spektrum annähernd gleichmäßig wiedergab, in einem photographisch sehr ungünstigen Gebiete (Grün-Rot inkl.), ferner gute Schwärzungsabstufung (Gradation) besaß und schleierfrei arbeitete.

Von käuflichen, rottempfindlichen Platten war mir die gute englische Spektralplatte von Wratten & Wrainright wegen des Krieges nicht zugänglich. Die deutsche panchromatische Platte von Perutz (Perchromoplatte sensibilisiert mit Äthylrot) erwies sich als ganz ungeeignet, obschon ich die Platten frisch von der Fabrik kommen ließ. Ihre Empfindlichkeit war ungenügend, und vor allem arbeitete sie so fleckig,

daß sie für vorliegenden Zweck nicht in Betracht kam. Ich mußte also selbst sensibilisierte Trockenplatten (sogen. Badeplatten, nicht in der Emulsion gefärbte) benutzen und entschied mich nach einigen Versuchen für Pinachrom als Sensibilisator. Dieser Farbstoff verleiht den Platten eine bemerkenswert gleichmäßige Empfindlichkeit für alle Farben bis zum Rot, obschon er im Rot selbst nicht so weit und kräftig sensibilisiert wie andere verwandte Farbstoffe. Andere Farbstoffe besitzen aber meist ein Minimum der Empfindlichkeit, das mitten in dem Untersuchungsspektrum liegt und deshalb sehr störend wirken würde. Ich verzichtete aber lieber auf das äußere Rot zugunsten eines gleichmäßigen Spektrums von 500 μ an.

Da durchaus nicht alle Plattenfabrikate sich gleich gut zum sensibilisieren eignen, anderseits eine möglichst hohe Empfindlichkeit nötig war, prüfte ich den größten Teil der bekannten hochempfindlichen Plattensorten (Agfa, Schleussner, Perutz, Hauff, Sachs und einige andere) auf ihr Verhalten und fand die Hauff Ultrarapidplatte, der übrigens die entsprechende Sachsplatte wenig nachstand, sehr geeignet. Die Hauffplatte (alle Pakete wurden in größerer Sendung frisch von der Fabrik bezogen) zeigten neben ihrer sehr großen Empfindlichkeit eine vorzügliche Gleichmäßigkeit der Schicht, Schleierfreiheit (wie sie z. B. die Lumièreplatte „Sensibilité extrême“, violettes Etikett, bei früheren Versuchen nie gezeigt hatte), gute Gradation und war auch nach der Sensibilisierung mit Pinachrom hochempfindlich und schleierfrei.

Es wurde stets eine größere Anzahl Platten präpariert, nach bekanntem Rezept in alkoholischer Lösung und im Luftstrom eines Ventilators getrocknet. Über das weitere Verhalten der Platten vgl. den späteren Abschnitt (p. 94).

Die Aufnahmen wurden zunächst mit Bogenlicht als fluoreszenzerregender Lichtquelle ausgeführt. Nach ihrer Beendigung in der p. 62 geschilderten Anordnung mit der Quecksilberlampe.

Während der ganzen Expositionszeit wurde soweit möglich die Zimmertemperatur konstant gehalten. — Zur Regulierung diente neben der unregelmäßig wirkenden Dampfheizung ein Gasofen.

Der Dampfdruck des Joddampfes ließ sich durch das Bad in der Dewarflasche konstant halten; zur Kontrolle der Zimmertemperatur bei den langfristigen Aufnahmen verwendete ich einen Thermographen.

Die weitaus meisten Aufnahmen mit Bogenlicht dauerten 4 Stunden. Nach dieser Zeit mußte die Institutsbatterie frisch aufgeladen werden.

Damit während der Expositionszeit nicht größere Erwärmung des Magneten eintrat, wurde dieser nie sehr stark belastet, und ich begnügte mich bei den Aufnahmen mit einer Höchstfeldstärke von 20000 Gauss. Außerdem lief während der ganzen Aufnahmezeit ein Ventilator, der einen kräftigen Luftstrom gegen den Magneten blies und so auch dafür sorgte, daß das Joddampfgefäß — abgesehen von dem im Dewargefäß gekühlten Ansatz — stets in einem Luftstrom von Zimmertemperatur war.

Um mit diesen Expositionszeiten auszukommen, wurde der Spalt des Spektrographen auf 0,1 mm Öffnung gestellt. Wie aus der Dispersionsangabe folgt, waren die Banden dabei noch deutlich genug getrennt, um die Intensitätsvergleiche in jedem Teile des Spektrums vornehmen zu können. Doch sei ausdrücklich hervorgehoben, daß auch entsprechend längere Aufnahmen mit ganz engem Spalt (0,02 mm) gemacht wurden, vor allem, um über Punkt 5: Strukturveränderung und Lage der Banden bzw. Resonanzlinien, Aufschluß zu gewinnen. Das gleiche gilt von den Aufnahmen des Resonanzspektrums mit der Quecksilberlampe, für das hier die normale Expositionszeit 12 Stunden betrug. So lange Expositionszeiten sind wegen der möglichen Erschütterungen — von Temperaturschwankungen abgesehen, die nach Möglichkeit korrigiert wurden — natürlich bedenklich, soweit es sich um feine Linienzerlegungen u. dgl. handelt; doch können sie bei diesen Aufnahmen mit Spalt 0,2 die Ergebnisse nicht beeinflussen. Zudem war der Spektrograph durch sein großes Eigengewicht, seine feste Fundierung auf der Steinplatte des Zimmers ziemlich gesichert gegen Erschütterungen.

Da es unmöglich war, gleichzeitig die Fluoreszenzaufnahmen mit und ohne Magnetfeld auf die gleiche Platte zu machen, mußte eine Reihe von Bedingungen erfüllt sein, um die Spektra

hinsichtlich ihrer Intensitätsverteilung gegeneinander vergleichen zu können.

Es war erforderlich:

1. Die zur Fluoreszenzerregung dienende Lichtquelle (Bogen- oder Quecksilberlampe) mußte während gleichen Expositionszeiten mit konstanter Helligkeit brennen. Über das hierfür erforderliche „Einbrennen der Lampe“, Kontrolle am Volt- und Amperemeter, Schutz der Quecksilberlampe gegen Luftströmung gilt das gleiche wie bei den okularen Messungen. Die kurzen Zuckungen der Bogenlampe, die bei letzteren Messungen störend empfunden wurden, spielen bei den Aufnahmen keine Rolle, da die Schwankungen nach Bruchteilen von Sekunden zählen und gegenüber einer mittleren Brennzeit von 4 Stunden die Gesamtlichtmenge nicht beeinflussen.

2. Der Dampfdruck des Jods mußte während der Aufnahme konstant bzw. die Temperatur und Dichte bekannt sein. Auch hierüber ist das Notwendige bereits gesagt. Zwischen den einzelnen Aufnahmen wurde noch die Reinheit des Jods bzw. die Güte des Vakuums im Gefäße mittels der angeschmolzenen kleinen Geissleröhre geprüft.

3. Das magnetische Feld mußte in gleicher Stärke gehalten werden. Dies wurde bei niedrigen Stromstärken, zu denen der Strom der 10-Volt-Batterie des Institutes diente, die dann weiter nicht benutzt wurde, leicht erreicht. Bei großen Feldern und hohen Stromstärken, zu denen das Netz der Hochschulzentrale herangezogen werden mußte, ließen sich Schwankungen infolge wechselnder Spannung nicht vermeiden. Da aber bei diesen Strömen der Magnet der Sättigung nahe war, machten selbst Schwankungen bis 0,5 Amp. wenig aus. Jedenfalls wurden Abweichungen über 5 Proz. der Feldstärke nicht beobachtet. Mit den Expositionen wurde erst begonnen, wenn nach Erwärmung der Widerstände und des Magneten stationärer Zustand erreicht war.

4. Die zu vergleichenden Aufnahmen mußten auf gleicher Platte gemacht werden; denn nur so ist genügende Gewähr für gleiche Entwicklungsschwärzung usw. gegeben. Daß im übrigen alle Aufnahmen auf der gleichen Plattensorte möglichst einer Emulsion entstammend gemacht wurden, ist bereits angeführt. Alle Platten wurden mit Rodinal 1:10 mit ab-

gemessener kleiner Bromkalimenge 5 Minuten nach der Uhr entwickelt. Von Temperaturschwankungen wird dieser Entwickler wenig beeinflusst, und so ist auch die Schleierschwärzung fast auf allen Platten die gleiche. Ebenso die Gradation, die vom gewählten Entwickler abhängig ist.

Dabei waren die Expositionszeiten so zu wählen, daß zu vergleichende Spektren noch im Gebiete der Normalschwärzung (Normalexposition) liegen. Daß die Gradation im ganzen untersuchten Spektralbezirke keine großen Differenzen zeigte, ist schon p. 74 hervorgehoben worden. Das Gebiet, in dem das Sensibilisierungsvermögen des Pinachroms im Rot rasch abklingt ($\lambda > 6000$), wurde zur Beurteilung nicht mitherangezogen, ebenso wie die über- und unterexponierten Teile des Spektrums. Hierüber, sowie über gewisse bei den langfristigen Aufnahmen mit Quecksilberlicht auftretende Schwierigkeiten, wird im letzten Abschnitte p. 94 zu sprechen sein.

H. Auswertung der Spektrogramme.

Die stets im Luftstrome des Ventilators (nie wegen Dichteänderung im Alkohol) getrockneten Platten, wurden mit dem Eartmannschen Mikrophotometer ausgemessen.

Der benutzte Photometerkeil verläuft im Gebiete der Normalexposition so gleichmäßig, daß die Photometerkeilwerte nahezu proportional den wirklichen Schwärzungen zu setzen sind, und deshalb sind in den folgenden Kurven erstere als Ordinaten statt der wahren Schwärzungen benutzt. Die eingetragenen Werte für die Schwärzungen sind das Mittel aus wenigstens drei Ablesungen. Der mittlere Meßfehler wird eine halbe Einheit des Photometerkeils nicht übersteigen.

Zur Erleichterung der Ausmessung wurden, obschon die Lage der Fluoreszenzbanden und -linien hinreichend genau bekannt ist, die Hg-Linien als Fixpunkte zum Vergleiche in jedes Spektrogramm hineingeworfen.

Die Lage der Resonanzlinien ist neuerdings von R. W. Wood¹⁾ mittels eines großen Gitters genau bestimmt worden, und die seiner Arbeit beigegebene Reproduktion gibt eine gute Vorstellung des Spektrums, obschon die enormen Intensitätsunterschiede in den einzelnen Linien nicht so hervortreten, wie ich dies auf meinen Spektrogrammen bemerkte. Eine

1) R. W. Wood, Phil. Mag. 1911. p. 469 u. Phil. Mag. 1912. p. 673.

ebenfalls gute Wiedergabe für das Aussehen des vollständigen Bandenspektrums nach R. W. Wood findet sich im *Phil. Mag.* Wie man hierauf deutlich sieht, besteht das Spektrum aus einer Reihe deutlich getrennter Banden, die nur zwischen λ 550—655 $\mu\mu$ etwas unregelmäßig durcheinandergreifen und daher hier schwieriger zu messen sind.

Ich habe auf Abbildung der Spektrogramme verzichtet, da die Intensitätsverteilung und -änderung sich graphisch klarer darstellen läßt. Da es aber bei okularer Mikrophotometrie unmöglich ist, ein so ausgedehntes Bandenspektrum vollständig zu photometrieren — leider stand mir ein Kochsches registrierendes Instrument nicht zur Verfügung und war auch jetzt nicht zu beschaffen —, so mußte ich mich damit begnügen, in jeder Bande die Hauptschwärzung zu bestimmen und diese Bezirke gleicher Wellenlänge in den einzelnen Spektren miteinander zu vergleichen. Auch so gingen die mikrophotometrischen Einzelablesungen noch bis zu Tausend.

Auf diese Weise sind die weiterhin folgenden Intensitätskurven jedes Spektrums entstanden und der Übersichtlichkeit halber durch eine Linie miteinander verbunden, obschon natürlich diese Schwärzungen nicht kontinuierlich einander folgen.

Die Kurven geben das Schwärzungsbild der Platte, wie es sich dem Auge darbietet, anschaulich wieder. Voraussetzung für die Möglichkeit solcher „Intensitätskurven“ ist, daß die Spektren nicht durch das Magnetfeld eine Strukturänderung erfahren, indem etwa bestimmte Linien oder Liniengruppen ausfallen, verschoben, gespalten oder ungleich geschwächt werden; dies war aber, wie sorgfältige Vergleiche zeigten, (vgl. p. 99) nirgends der Fall.

Die Messung der Resonanzlinien gestaltet sich einfach. Ihre Darstellung durch eine analoge Intensitätsschwärzungskurve ist aber wegen der enormen Intensitätsunterschiede der einzelnen Linien undurchführbar; die Kurven würden sich derartig voller Maxima und Minima schneiden, daß der Überblick verloren ginge.

Ich habe deshalb nur in einem Falle (Fig. 12) die wirklich gemessenen Werte für einzelne Linien eingetragen, ohne sie untereinander zu verbinden und lediglich, um einen Vergleich in der Intensitätsverteilung und dem ganz verschiedenen Aussehen des Banden- und des Resonanzspektrums zu ermög-

lichen. Im übrigen habe ich beim Resonanzspektrum direkt die Schwärzungsdifferenzen in gleichen Linien der Spektra mit und ohne Feld eingetragen und diese geradlinig miteinander verbunden (Figg. 12, 13, 14).

Man sieht so, da es ja nur auf die Intensitätsunterschiede (Schwärzungsdifferenzen) der Linien bei verschiedenen Magnetfeldern ankommt, wie sich die Intensität in den einzelnen Teilen des Spektrums verschieden stark ändert, ebenso die Änderungen mit der Dampfdichte und Temperatur.

In den Kurven des Resonanzspektrums fehlen vollständig die Hauptlinien (die mit den anregenden Quecksilberlinien zusammenfallen). Sie sind infolge zerstreuten Lichtes (vgl. p. 62) soviel stärker und nicht meßbar, daß sie für jeden Vergleich ausscheiden müssen.

J. Resultate.

Die im folgenden wiedergegebenen Kurven (Figg. 6—14) stellen den Intensitätsverlauf der Spektren dar:

1. Bei verschiedenem Magnetfelde.
2. Bei verschiedenem Dampfdrucke und verschiedener Temperatur.
3. Bei verschiedener Anregung (Bogenlicht und Quecksilberlicht).

Außerdem ist zum Vergleiche für den Intensitätsverlauf gezeigt, wie das magnetisch nicht veränderte Spektrum auf den benutzten Platten bei variierter Expositionszeit und Beleuchtungsintensität zum Ausdruck kommt, um zu beweisen, daß die gemessenen Abweichungen vom normalen Verlaufe nicht ihren Grund in Eigenschaften der benutzten sensibilisierten Platten haben (Fig. 11).

Die in einer jeden Tafel zusammengestellten Kurven sind — soweit nicht ausdrücklich anders bemerkt — auf ein und derselben Platte aufgenommen; ausnahmslos gilt dies von den vollständigen bei Anregung mit Bogenlicht erhaltenen Bandenspektren. Für die Quecksilberaufnahmen sei noch auf den folgenden Abschnitt verwiesen.

Die Kurven auf Fig. 6 zeigen den Verlauf des Spektrums bei konstanter Temperatur im Dewargefäße von $19,8^{\circ}\text{C}$ und annähernd konstanter Zimmertemperatur von 21° . Der Joddampf ist also nahezu gesättigt.

Kurve *a* stellt den Verlauf bei magnetisch unbeeinflusstem Spektrum dar. Wie man sieht, liegt die maximale Intensität zwischen λ 5800—6000, also im Gelbrot. Der rasche Intensitätsabfall von λ 6100 ab dürfte mit der Abnahme der Plattenempfindlichkeit (Ende des Sensibilisierungsbandes) zusammenhängen. Dieser Teil ebenso wie das Gebiet über λ 5400 (wegen Unterbelichtung) ist von der Diskussion auszuschließen.

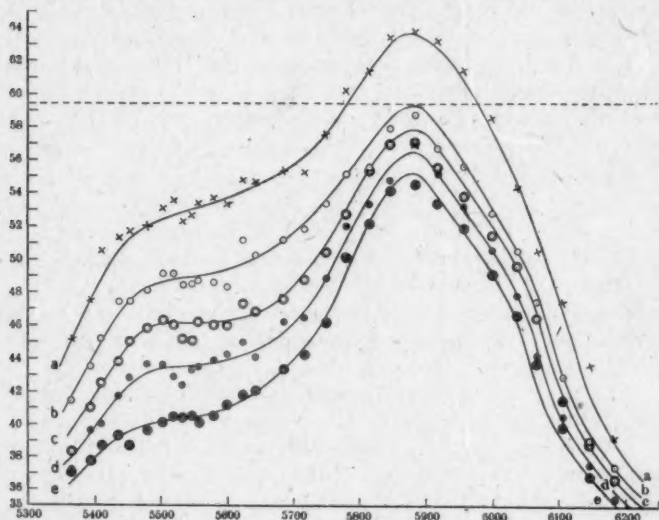


Fig. 6.

Kurve *b* stellt den Verlauf bei einem Magnetfelde von 5000 Gauss, *c* bei 10000 Gauss, *d* bei 15000 Gauss, *e* bei 20000 Gauss dar.

Wie man sieht, ist die Schwärzungsabnahme annähernd proportional dem Magnetfelde. Berücksichtigt man, daß man in diesem Gebiete der Normalexposition die Schwärzung dem Logarithmus der wirksamen Lichtmenge proportional zu setzen hat, so ergibt sich die völlige Übereinstimmung mit okularen Messungen im Spektralphotometer.

Ferner sieht man deutlich, wie im Gebiete kürzerer Wellen λ 5400—5700 die Schwärzung viel stärker erfolgt als im Rot, was sich ebenso bei den okularen Messungen gezeigt hatte.

Zwischen Kurve *a* und *b* ist scheinbar beim Einsetzen des Magnetfeldes auch im Rot die Schwächung von gleichem Betrage wie im Grün und daher im Vergleiche mit stärkeren Feldern anfangs die Schwächung viel größer; doch ist diese Wirkung nicht reell, wie Vergleiche mit anderen Platten zeigen; denn der rote Teil der Kurve *a* liegt schon außerhalb des Gebietes der Normalschwärzung (Grenze durch punktierte Linie in Fig. 6) und darf nicht mehr zu genauem Vergleiche herangezogen werden, weil hier die Photometerkeilwerte nicht mehr der Schwärzung proportional verlaufen.

Es war mir nicht möglich, auf einer Platte die Spekttra ohne und mit verschiedenem Felde so zu erhalten, daß alle Spekttra noch ganz im Gebiete der Normalschwärzung liegen.

Aufnahmen vom Spektrum ohne und mit schwachem Felde, entsprechend (Kurve *a* und *b* bzw. *c*) kürzer exponiert, zeigen, daß auch Kurve *a* im Gebiete der Normalschwärzung genau gleichen Verlauf wie *b*, *c*, *d*, *e* im Rot besitzt und der Schwärzungsunterschied im Rot entsprechend kleiner als im Grün ist, wie es der Vergleich der Kurven *b*, *c*, *d*, *e* zeigt.

Man könnte vielleicht die verschiedene Schwächung im Rot und Grün mit dem Verhalten der benutzten Platte in Verbindung bringen, und zwar so, daß die Gradation im Gelbgrün (λ 5400—5700) so viel stärker erscheint wie im Gebiete längerer Wellen, daß mit allgemein abnehmender Lichtintensität die Schwärzung beim Gebiete kürzerer Wellen rascher abklingt wie im langwelligen Spektrum.

Die Gradation ist zwar verschieden, aber in entgegengesetztem Sinne; auch sind die Unterschiede so gering, daß sie den Charakter des Spektrums nicht merkbar verändern.

Zur Erläuterung dient Fig. 10, p. 86.

Hier sieht man in den drei ausgezogenen Kurven *a*, *b*, *c* das Fluoreszenzspektrum ohne Magnetfeld, aber verschieden lange auf die gleiche Platte exponiert. Wie man sieht, verlaufen die drei Kurven verschiedener Intensität nahezu parallel.

Gleiche Kurven erhält man, wenn man die Intensität nicht variiert durch Änderung der Expositionszeit, sondern durch verkleinerte Lichtmenge, d. i. durch Abblendung des Kollimatorobjektives.

Zwischen diesen Kurven ist eine vierte d eingetragen, die das Fluoreszenzspektrum bei einem Magnetfelde von 20000 Gauss zeigt. Man sieht deutlich den steileren Anstieg im Gebiete langer Wellen oder, anders ausgedrückt, die stärkere Schwächung des Fluoreszenzlichtes im kurzwelligeren Spektrum, wo die Kurven weit auseinander gehen, während sie sich im Rot nahezu berühren.

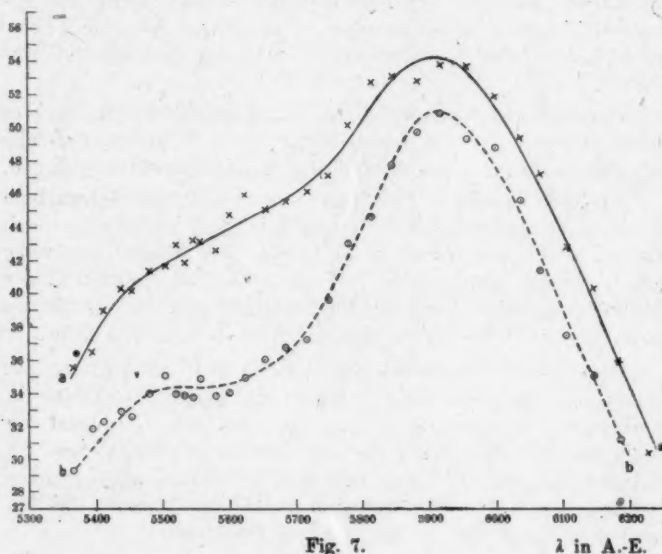


Fig. 7.

 λ in Å-E.

Figg. 7, 8, 9, 10 dienen zum Vergleiche für den Einfluß von Temperatur und Dampfdichte.

Durch die angewendete Methode: Kühlung des Ansatzes des Jodgefäßes in der Dewarflasche und Erhaltung auf bestimmter Temperatur, ist zwar ein bestimmter Druck des Dampfes im Gefäße gewährleistet, da dieser immer der kühleren Stelle eines Raumes entspricht; es fragt sich aber, ob die mehr oder weniger große Überhitzung des Dampfes in den wärmeren Stellen irgendwie von Einfluß auf die Größe des magnetischen Effektes sei. Und diese Untersuchung ist erforderlich, weil es nicht möglich war, das ganze im Magnet-

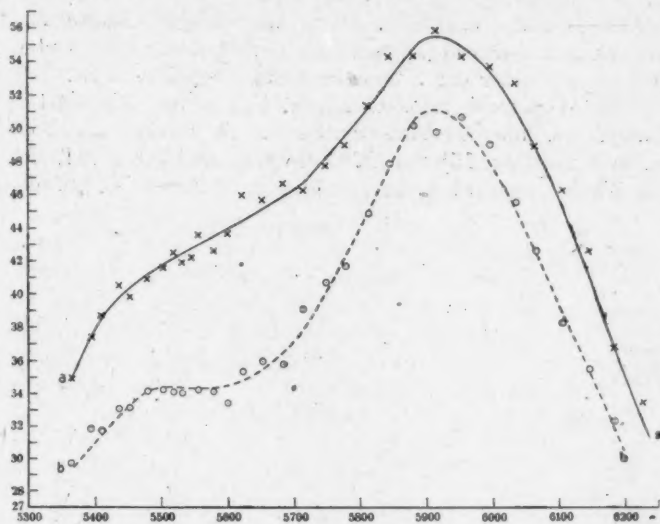


Fig. 8.

λ in A.-E.

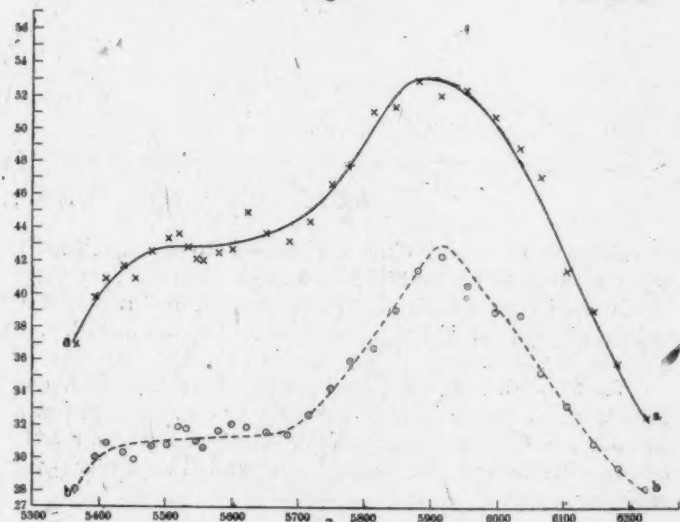


Fig. 9.

λ in A.-E.

6°

felde befindliche Gefäß auf 0° zu bringen, eine Temperatur, die schon bei den spektrophotometrischen Messungen Unterschiede gegenüber der Zimmertemperatur ergeben hatte.

Ein Unterschied zwischen gesättigtem und überhitztem Dampf war aber nicht festzustellen. So zeigten alle Aufnahmen zwischen 15° und 27° (in diesem Intervalle ließ sich die Zimmertemperatur variieren) genau gleichen Verlauf der

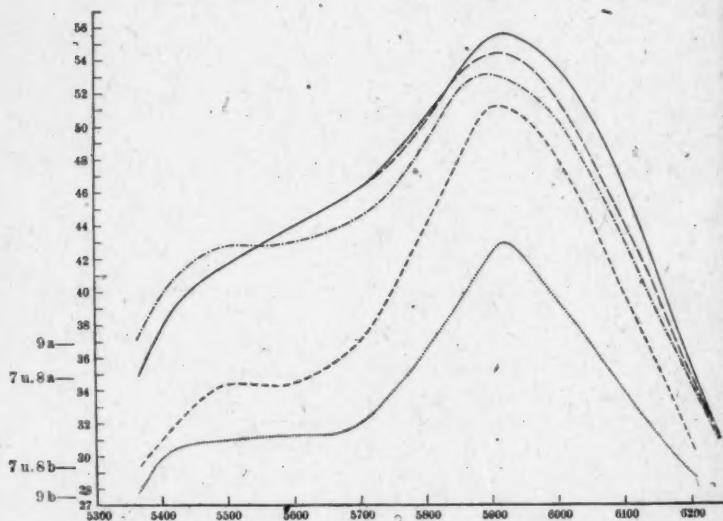


Fig. 10.

λ in Å-E.

Schwächung (mit und ohne Feld innerhalb der Meßfehler), wenn sie einmal bei gesättigtem Dampfe (Zimmertemperatur gleich Badtemperatur in der Dewarflasche), das andere Mal mit größtmöglicher Temperaturdifferenz zwischen beiden aufgenommen waren.

Ja es ergab sich das sehr bemerkenswerte Resultat, daß bei Dampfdrucken, die 15° – 20° entsprechen, d. h. zwischen Drucken von $0,13$ – $0,4$ mm¹), die Intensitätsänderung der beobachteten Fluoreszenz von Dampfdruck und Temperatur ganz unabhängig war.

1) R. W. Wood, Phil. Mag. 1914. p. 533.

Fig. 8 gibt die Fluoreszenz und Schwächung an überhitztem Dampf von 25° , Fig. 7 an gesättigtem Dampf von 20° wieder.

Dagegen ist zwischen 0° und 15° (Druck ca. 0,03—0,13 mm) der Effekt viel größer.

Die Kurven in Figg. 7, 8, 9 entstammen einer Platte, sind aber getrennt gezeichnet, um die Beobachtungswerte für jede Kurve getrennt erkennen zu lassen.

In Fig. 10 sind die Kurven noch einmal zusammengefaßt unter Fortlassung der einzelnen Meßpunkte.

Die Kurven 7a, 8a, 9a sind alle ohne Magnetfeld erhalten, aber mit verschieden langer Exposition, um sie in möglichst gleicher Schwärzung zu erhalten, da natürlich die Fluoreszenzhelligkeit von dem Dampfdrucke abhängig ist.

Die Kurven 7b, 8b, 9b sind alle mit Magnetfeld von 20000 Gauss aufgenommen, aber mit gleicher Expositionszeit und Dampfdruck wie die zugehörigen a-Kurven.

Beim Vergleich der drei a-Kurven sieht man zunächst, daß 7a und 8a im grünen Teile identisch verlaufen, d. h. im äußeren Grün schwache Intensität besitzen, die dann ziemlich steil zum Rot ansteigt, und zwar stärker noch bei 8 als bei 7, was sich durch die Absorption des Fluoreszenzlichtes im Joddampfe (durchlaufene Schichtdicke ca. 3 cm, vgl. p. 63) mit steigender Dampfdichte einfach erklärt. (Man vergleiche die betreffende Arbeit von R. W. Wood über Messungen und Absorption des Fluoreszenzlichtes in den verschiedenen Spektralbezirken).¹⁾

Da 8 bei 25° , also höherem Dampfdruck als 7 bei 20° , aufgenommen ist, wird das Grün stärker absorbiert wie das Rot, und noch deutlicher zeigt sich dieser Absorptionsunterschied zwischen den Kurven 8a und 7a einerseits und 9a andererseits.

Letzteres bei 0° aufgenommene Spektrum besitzt im Grün verhältnismäßig so schwache Absorption, daß der kurzwellige Teil der Kurve oberhalb der beiden anderen verläuft (vgl. Fig. 10), sie dann schneidet und im Rot unter den anderen bleibt.

Es ist bemerkenswert, daß diese an sich geringen Intensitätsunterschiede im Charakter des Spektrums (sie liegen

1) l. c.

innerhalb der einzelnen Meßfehler) in den Kurven zum Ausdruck kommen.

Auffallend ist aber die magnetische Wirkung: der Vergleich zwischen den Kurven b.

Zunächst ist wieder die stärkere Schwächung mehr im Grün als im Rot, bei 8 und 7 besonders erkennbar. Während aber diese beiden um den gleichen Bruchteil ihrer Gesamtintensität

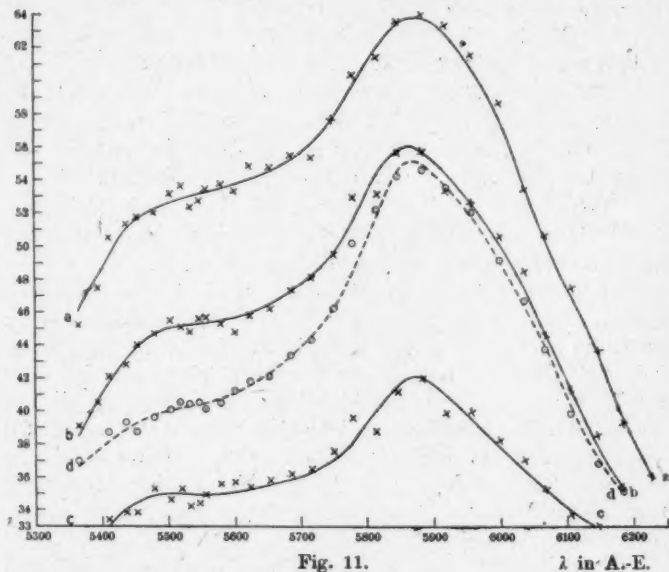


Fig. 11.

λ in Å-E.

— trotz ihrer verschiedenen Dampfdrucke und verschiedenen Absolutheitigkeit — durch ein Feld von 20000 Gauss geschwächt werden, ist die prozentuale Schwächung bei 9 viel größer.

Eine einfache Erklärung dieses Unterschiedes zwischen den Kurven 8b, 7b einerseits und 9b andererseits läßt sich aus Temperatur- und Dichteänderungen allein nicht geben; denn es ist nicht ersichtlich, warum die Änderung der Temperatur zwischen 0 und 15° und dadurch bewirkte Vermehrung der Dichte um ca. das Drei- bis Vierfache erheblichen Einfluß auf die magnetische Schwächung haben soll, nicht aber eine entsprechende Änderung der Temperatur von 15 bis 27° mit

analoger Dichtevermehrung um das Dreifache, wobei noch keinerlei Unterschiede zwischen gesättigtem und überhitztem Dampf bemerkbar sind.

Die Erscheinung wird aber verständlich, wenn man die vorliegenden Versuchsbedingungen betrachtet.

Die Helligkeit jeder beobachtbaren Fluoreszenz in Dämpfen oder Lösungen hängt bei gewählten, unverändert bleibenden Schichtdicken von drei Faktoren ab.

1. Von der Helligkeit oder spezifischen Intensität der Erregungsquelle.

2. Von der Konzentration oder Anzahl fluoreszierender Moleküle.

3. Von der (hiervon wieder abhängigen) Absorption des erregenden und erregten Lichtes.

Solange der Dampfdruck sehr niedrig und die Anzahl fluoreszenzfähiger Moleküle gering ist, ist auch die Absorption des erregenden Lichtes gering und die Fluoreszenzhelligkeit aus ersterem Grunde schwach.

Mit wachsender Dampfdichte wächst die Molekülzahl, die Absorption des erregenden Lichtes und die Helligkeit der Fluoreszenz an der Beobachtungsstelle bis zu einem Optimum, das überschritten wird, wenn die wachsende Zahl fluoreszierender Moleküle nicht mehr der durch Absorption bedingten Intensitätsminderung des erregenden Lichtes das Gleichgewicht hält.

Von da aber sinkt die Fluoreszenzhelligkeit rasch ab und kann nur noch kräftig erhalten werden, wenn man die Schichtdicke verkleinert, um die Absorption dadurch zu kompensieren — vorausgesetzt, daß die Anregungsintensität unverändert bleibt.

Man kann dies auch anders ausdrücken:

Bei niedrigen Dampfdrucken nimmt jedes vorhandene Molekül so viel von der Energie des erregenden Lichtes auf, wie es von der spezifischen Intensität dieser Lichtquelle absorbieren kann, leuchtet also selbst mit einer gewissen Maximalhelligkeit, und die Amplituden bei der Emission des Spektrums haben einen gewissen Maximalwert.

Mit wachsender Dampfdichte wächst zwar die Anzahl fluoreszierender Moleküle und damit die Gesamthelligkeit;

gleichzeitig verliert aber das erregende Licht so viel durch vermehrte Absorption, daß auf das einzelne fluoreszierende Molekül ein geringerer Teil der Energie kommt, und dieses daher auch nicht in gleichem Maße wie im ersten Falle zum Selbstleuchten und Schwingen kommt.

„Es nimmt gewissermaßen die spezifische Leuchtkraft pro Molekül ab.“

In unserem Falle hat das erregende Licht eine Dicke von 3 cm zu durchlaufen, ehe der Kegel im Interferrikum konzentriert wird. Bei 0° C ist die Dampfdichte (ca. 0,03 mm) noch so gering, wie sich durch einfache Versuche zeigen läßt, daß alle Moleküle ungefähr maximal erregt werden. Oberhalb 15° steigt aber die Dampfdichte sehr rasch an und zunächst auch noch mit ihr die Gesamthelligkeit, um bei ca. 26°—27° ihr Maximum zu erreichen; von da ab nimmt die Fluoreszenzhelligkeit rasch ab mit steigender Dampfdichte. R. W. Wood¹⁾ gibt in seiner Arbeit photometrische Messungen dieser Gesamthelligkeit und stellt den Verlauf graphisch dar.

Nimmt man nun an (vgl. p. 59, Einleitung), daß das Magnetfeld nicht die Dampfdichte und Zahl der fluoreszierenden Moleküle ändert — dann wäre wohl mit wachsender Dampfdichte eine größere Wirkung des Feldes wahrscheinlicher —, sondern daß die Schwingungen des einzelnen Moleküls geschwächt werden, so ist verständlich, daß die Wirkung bei so niedrigem Dampfdrucke eine andere ist wie bei höherem, und wenn hier die Schwächung bei 0° viel stärker hervortritt, so würde das heißen, daß *das magnetische Feld das einzelne Molekül um so stärker beeinflusst, je größere Amplituden bei der Fluoreszenzemission auftreten*, eine Folgerung, die im Einklang steht mit den obigen Beobachtungen (p. 72), daß photometrisch gemessen die Fluoreszenzschwächung stärker war bei sonst gleichen Dampfdrucken und Feldern, wenn mit der spezifisch helleren Bogenlampe als mit der Halbwattprojektionslampe die Fluoreszenz erregt wurde.

Natürlich ist auch hier vorausgesetzt, daß tatsächlich die Absorptionsverhältnisse von dem Magnetfelde nicht beeinflusst werden.

Bemerkt sei noch, daß R. W. Wood in der zitierten Arbeit²⁾

1) l. c.

2) R. W. Wood, Phil. Mag. 1914. p. 1016.

angibt, bei höheren Temperaturen über 40° , obschon die Fluoreszenz noch deutlich war, habe er kaum eine Schwächung erhalten. (Vgl. auch Eingang p. 56.)

Ich verzichtete darauf, bei solchen Temperaturen zu messen, da dies ohne erhebliche Änderung der Versuchsanordnung nicht durchführbar war und ein solches Resultat nach Obigem wahrscheinlich und erklärlich ist.

Es schien wünschenswert, das erhaltene Resultat über den Einfluß des Feldes bei verschiedener Anregung noch anderweitig zu stützen. Mit schwächeren Lichtquellen zu arbeiten oder etwa das Bogenlicht durch Absorptionströge zu schwächen, war wegen der gesteigerten technischen Schwierigkeiten bei den dazu erforderlichen langen Expositionszeiten untunlich (die Batterien mußten dann zwischendurch aufs neue geladen werden u. a. m.), und auf das Sonnenlicht als hellere Lichtquelle, wo gesteigerte Wirkung zu erwarten wäre, mußte ich, wie schon bemerkt, verzichten.

Es kam zur Entscheidung dieser Frage noch das Resonanzspektrum in Frage. Die zur Erregung brauchbaren Quecksilberlinien besitzen eine so sehr viel größere Energie wie analoge Wellenlängenbezirke des kontinuierlichen Spektrums jeder Lichtquelle, daß man bei ihnen eine besonders große Wirkung erwarten mußte.

Ferner zeigt das Resonanzspektrum in der ganzen Intensitätsverteilung einen so besonderen Charakter, neben starken Linien treten ganz schwache auf, daß man erwarten kann, hier besonders gutes Material für die Untersuchung zu finden, *welche Rolle die Intensität in den einzelnen Frequenzen auf die Größe des Effektes spielt.*

Daß man über die Entstehungsart und die Eigentümlichkeiten dieses Resonanzspektrums nichts Genaueres weiß, hat wohl weniger Bedeutung, da es nicht darauf ankommt, auf welche Art die Schwingungen entstehen, sondern nur darauf, ob sie mit großer oder kleiner Intensität (Amplitude) erfolgen.

Fig. 12 gibt ein Bild des Resonanzspektrums, in dem in gleicher Art wie bei den früheren Kurven (nur daß die Meßwerte nicht zu einer Kurve vereinigt sind) die gemessenen Schwärzungen ohne Feld und mit Magnetfeld von 20000 Gauss eingetragen sind.

Die Schwärzungen liegen zwischen Unter- und Überexposition.

Die Schwärzungen ohne Feld sind durch \oplus , mit Feld durch \times in der Figur für jede einzelne Resonanzlinie bezeichnet, die Differenzen aus beiden durch \odot gekennzeichnet.

Man sieht die enormen Intensitätsunterschiede der Linien im ganzen Spektrum und die Unmöglichkeit, sie übersichtlich in eine Kurve zusammenzufassen. Unterhalb der Werte

selbst befinden sich geradlinig zu Kurven verbunden die Schwärzungsdifferenzen zwischen Linien gleicher Wellenlänge in beiden Spektren, um ein Maß für die magnetische Wirkung zu geben, und zwar sind für sich verbunden die Schwärzungsdifferenzen bei den starken Linien *a* (Schwärzungskelwerte größer als 30) und bei den schwachen *b* (Kelwerte zwischen 22 und 30), und zwar nur der Übersichtlichkeit halber.

(In den folgenden Kurven Figg. 13 und 14 sind die schwachen Linien, weil durchweg unterexponiert, ganz fortgelassen.)

Die Differenzkurve *a* zeigt ebenso wie *b*, daß die Schwächung mit wachsender Wellenlänge abnimmt, genau wie bei den vollständigen Bandenspektren.

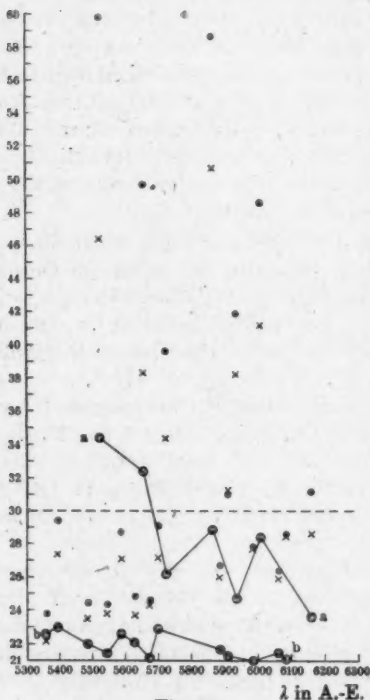


Fig. 12.

Ferner zeigt besonders *a*, wie die magnetische Schwächung — von der spektralen Lage der Linien abgesehen — um so stärker hervortritt, je intensiver die einzelne Linie erscheint, d. h. je größer die Schwingungsamplituden in allen Frequenzen,

ein Resultat, das sich also vollständig mit dem zuvor erörterten deckt.

Bei den schwachen Linien ist die magnetische Wirkung zum Teil so gering, daß sie wegen der Meßfehler überhaupt nicht mehr sicher festzustellen ist.

Im übrigen ist der Gang des Effektes bei allen Aufnahmen der gleiche wie im vollständigen, mit Bogenlicht erregten Fluoreszenzspektrum, soweit das später besprochene Verhalten der Platten die Feststellung erlaubte.

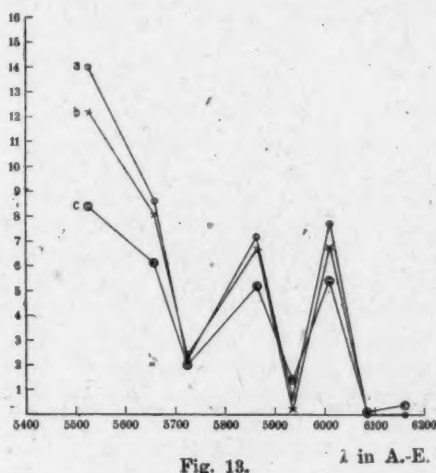


Fig. 13.

λ in Å.

So zeigen die Schwärzungsdifferenzen der magnetischen Wirkung bei 20° und 25° keine Unterschiede. Desgleichen sind Kurven bei gesättigtem und ungesättigtem Dampfe identisch und die Schwärzungsdifferenzen bei verschiedenem Felde zeigen proportionalen Gang.

Das letztere erläutert die Fig. 13, die die Unterschiede bei Feldern von 20000 gegen 15000 Gauss c, von 20000 gegen 10000 Gauss b und von 20000 gegen 5000 Gauss a darstellt. Bei gleicher Temperatur (20°) und Bedingungen wie die analogen Aufnahmen des vollständigen Bandenspektrums.

Während aber bei Temperaturen über 15° keine Unterschiede in den Kurven hervortreten (genau wie zuvor p. 84), zeigt sich wieder bei 0° C eine bedeutend größere Wirkung, wie die folgende Fig. 14 erkennen läßt. (Kurve a Schwärzungsdifferenz bei 0° , Kurve b bei 18° .)

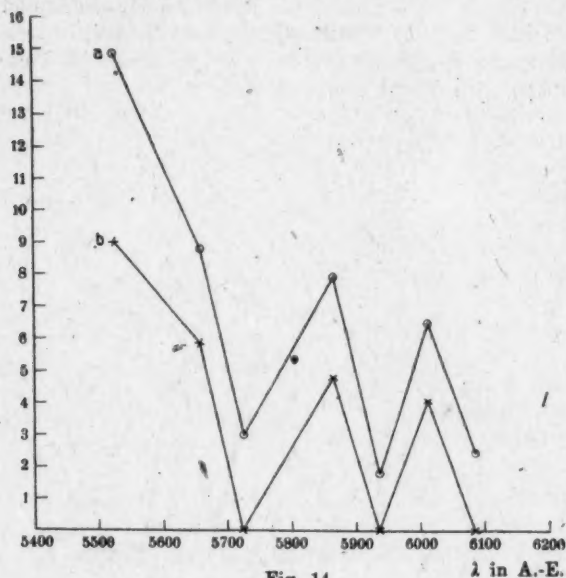


Fig. 14.

Es ergeben übereinstimmend die spektrographischen Aufnahmen und Ausmessungen bei Anregung der Fluoreszenz mit Bogenlicht und mit Quecksilberlicht folgendes:

I. Die Schwächung durch das Magnetfeld ist verschieden im Spektrum, und zwar sind Linien und Banden im Gebiete kürzerer Wellenlänge stärker geschwächt wie nach längeren Wellen hin, so daß also eine spektrale Intensitätsverschiebung mit dem Magnetfelde verbunden ist.

II. Die Schwächung für verschieden starke Felder zeigt eine dem Magnetfelde proportionale Schwärzungsabnahme im Gebiete der Normalexposition, in dem die Schwärzung proportional dem Logarithmus der einwirkenden Lichtmenge ist.

III. Strukturänderungen im Bau des Banden- und Resonanzspektrums sind nicht nachweisbar.

IV. Die Temperatur und Dampfdichte haben keinen Einfluß auf die Größe und Art der magnetischen Einwirkung, soweit sekundäre Einwirkungen durch Absorption ausgeschlossen sind.

V. Das Magnetfeld äußert um so stärkere Wirkung, je intensiver die Fluoreszenzerregung pro Molekül durch die äußere Lichtquelle erfolgt bzw. je größer die Schwingungsamplituden in den einzelnen Frequenzen des Fluoreszenzspektrums sind.

Diese Resultate stehen in Punkt 1, 2 und 5 in Übereinstimmung mit den durch okulare Photometrie gewonnenen Ergebnissen.

K. Fehlerquellen.

I. Polarisation.

Bei der Beurteilung der spektrophotometrischen und spektrographischen Messungen darf eine Erscheinung nicht unbeachtet bleiben, die von R. W. Wood aufgefunden und untersucht worden ist. Letzterer fand, daß Joddampf, wenn die Anregung zur Fluoreszenz mit polarisiertem Lichte erfolgt, seinerseits im Gegensatze zu den meisten Fluoreszenzerscheinungen wieder teilweise polarisiertes Licht ausstrahlt.¹⁾

Er beobachtete und maß die Erscheinung mit Savart'scher Platte und Fresnelschem Biprisma. Dabei stellte er ferner fest, daß auch bei Beleuchtung mit natürlichem Lichte ein geringer Bruchteil des Fluoreszenzlichtes (4–6 Proz.) noch polarisiert war, ein Anteil, der sich einfacher Beobachtung mittels Nikolschem Prisma und bloßem Auge entzieht. Es war mir auch bei den spektrophotometrischen Messungen nicht möglich, einen Einfluß eines zwischengeschalteten Nicols festzustellen.

Solange aber über den Vorgang bei der Emission des Fluoreszenzlichtes nichts Genaues bekannt ist, ist die Möglichkeit nicht von der Hand zu weisen, daß unter dem richtenden Einflusse des Magnetfeldes auch dieser polarisierte Bruchteil eine besondere Änderung erfährt, daß dieser ferner durch die Optik des Spektrographen bei den mehrfachen

1) R. W. Wood, Phil. Mag. Juli 1908 u. Phil. Mag. 1911. p. 478; vgl. auch Phys. Zeitschr. 1913. p. 1200.

Reflexionen und Brechungen in den Prismenflächen verschieden stark geschwächt und dadurch die spektrale Intensitätsverteilung in den Spektrogrammen beeinflusst würde.

Eine spektrographische Untersuchung des Polarisationszustandes in den einzelnen Teilen des Spektrums, etwa durch Zerlegung mittels Wollastonprisma o. dgl., ist durch die Lichtschwäche und die bei den längeren Expositionen vermehrten Fehlerquellen nicht durchführbar. Ob aber der Polarisationszustand bei der spektralen Intensitätsverteilung im Magnetfelde mitspielte, wurde auf zweierlei Weise nachgeprüft.

A. Es wurden wie immer Aufnahmen mit und ohne Magnetfeld auf eine Platte gemacht und zum Vergleich das Spektrum nochmals mit gleicher Feldstärke, aber nach Zwischenschaltung einer drehenden 1,8 mm dicken Quarzplatte zwischen Spalt und Projektionslinse aufgenommen. Um gleiche Schwärzungen in den Spektren zu erhalten, wurde der Lichtverlust an der Quarzplatte (berechnet nach den Fresnelschen Formeln) durch entsprechend vermehrte Expositionszeit ausgeglichen.

Die Spektren zeigten aber völlig identischen Schwärzungsverlauf.

B. Bei dem zweiten Versuche wurde das Prisma im Apparate durch das p. 68 geschilderte, metallisch reflektierende Plangitter ersetzt und mit ihm Aufnahmen ohne und mit Magnetfeld gemacht.

Die Aufnahmen waren wegen der Lichtschwäche des Gitters (verglichen mit dem Prisma) sehr schwierig; doch gelang es, zwei brauchbare Aufnahmen zu erhalten, die zeigten, *daß der Intensitätsverlauf mit und ohne Magnetfeld der gleiche war, wie ihn die mit dem Prisma erhaltenen Aufnahmen zeigen.*

Daraus folgt, daß die aus den Spektrogrammen erhaltenen Intensitätskurven unabhängig von der Optik der Versuchsanordnung sind und daß der etwa vorhandene polarisierte Bruchteil des Fluoreszenzlichtes auf Größe und Verlauf der magnetischen Einwirkung nicht maßgebend ist.

II. Verhalten der photographischen Platten.

Es mag sonderbar erscheinen, daß bei der Auswertung der Spektrogramme die mikrophotometrischen Messungen mehr

zur qualitativen als quantitativen Photometrie des Spektrums herangezogen sind.

Das hat seinen Grund in dem besonderen Verhalten der benutzten Platten, das quantitative Folgerungen sehr erschwert.

Um aus gemessenen Schwärzungen die zugehörigen Intensitäten ermitteln zu können bzw. um das Intensitätsverhältnis aus den Schwärzungswerten anzugeben, muß die Schwärzung als Funktion der Lichtmenge (Intensität \times Zeit) bekannt sein. Diesem Zwecke dienen die Schwärzungsgesetze.

So hat Schwarzschild in seinem bekannten Gesetze die Abweichung von der photographischen Reziprozitätsregel ($i_1 \cdot t_1 = i_2 \cdot t_2$), die für genauere Messungen völlig versagt, durch die Formel $s = i \cdot t^p$ ausgedrückt, worin s die „latente“ Schwärzung bedeutet und p eine für die betreffende Plattensorte bestimmte Konstante ist.

Die entwickelte Schwärzung S ist also als Funktion dieser latenten Schwärzung s anzusehen, und hat man die Schwärzungskurve (Schwärzung-log. Zeit-Kurve) für die betreffende Platte ermittelt, ebenso den Exponenten p durch Versuche mit zwei in bekanntem Verhältnisse stehenden Intensitäten, so kann man für eine gegebene Schwärzung aus der Abszisse der Schwärzungskurve, der Expositionszeit und dem Exponenten p die zugehörige Intensität bzw. das Intensitätsverhältnis zweier Schwärzungen angeben.

Will man dies zunächst für unzerlegtes Licht gültige Gesetz zur spektralen Photometrie benutzen, so setzt das voraus, daß Schwärzungskurve und Konstante p der betreffenden Platte nicht ihrerseits Funktionen der Wellenlänge sind, ferner, daß der Gültigkeitsbereich des Gesetzes hinsichtlich der Schwärzungsfunktion genau bekannt ist.

Da hierüber keine zuverlässigen, zum Teil widerspruchsvollen Angaben vorlagen, untersuchte J. Stark genauer die Bedingungen zur spektralen Photometrie. Ausgehend von den Gesetzen von Hurter und Druffield, stellte er für eine hochempfindliche, nicht sensibilisierte Plattensorte (Lumière) durch weitgehende Variation von Expositionszeit und Intensität die Schwärzungsfunktion S in Abhängigkeit von der Wellenlänge nach der Formel $S = \log. (k \cdot i^m \cdot t^n)$ fest und beschränkte den Gültigkeitsbereich auf das Gebiet der

Normalexposition, in welchem er bemerkenswerte Konstanz des Intensitäts- und Zeitexponenten fand.

Es lagen somit für vorliegende Arbeit genügend Unterlagen vor, die Schwärzung quantitativ zur Messung des Effektes in jeder Wellenlänge auszunutzen. Dem stand folgende Schwierigkeit entgegen.

Die Schwärzungsgesetze nehmen nach einmaliger Bestimmung der Konstanten (p oder n , m) an Platten einer Emulsion deren Unveränderlichkeit für längere Dauer an oder — vorsichtiger ausgedrückt — sie nehmen wenigstens an, daß innerhalb einer Platte während der Expositionszeit das belichtete und unbelichtete Bromsilberkorn keinerlei Änderung erfährt.

Dies war aber, wie sich bei den langfristigen Aufnahmen bei Quecksilberlicht zeigte, bei diesen Platten keineswegs der Fall. Vielmehr ließ sich bei sehr langen Expositionen beobachten, daß durch fortschreitende „Reifung“ der Emulsion die Empfindlichkeit und die Konstanten der Platte Änderungen erfuhren.

Macht man nämlich auf ein und dieselbe Platte Aufnahmen gemessener Zeitdauer mit einer konstanten Lichtquelle (spektral zerlegt oder unzerlegt) in Zwischenräumen von zwei Tagen, während in der Zwischenzeit die Quecksilberlampe zeitweilig oder dauernd brennt, so findet man auf der entwickelten Platte verschiedene Schwärzungen für gleiche Werte von $i \cdot t$.

Die Schwärzungen auf der Platte nehmen anfangs wenig, später mehr zu, ohne daß auf der Platte Schleierbildung eintritt, bis endlich bei langer Dauer dieses Versuches (über 14 Tage) die Platte kräftig zu schleiern beginnt, kraftlos wird — kurz, verdorben erscheint.

Die Gründe hierfür sind zweifache. In erster Linie trägt die Ozonbildung der Quecksilberlampe die Schuld, in zweiter Linie wirkt hohe Temperatur.

Wie schon aus älterer Zeit bekannt ist, wirken manche Stoffe, darunter Ozon, auf die photographische Platte ein. Bei schwacher Einwirkung analog schwacher Vorbelichtung, bei stärkerer Einwirkung ähnlich den Entwicklern.

Außerdem spielt aber die Zimmertemperatur eine große Rolle.

Es zeigte sich nämlich, daß bei niedriger Temperatur (Zimmer unter 18°) Platten derselben Emulsion und Sensibilisierung nach längerem Liegen in offener Kassette im Apparate kaum verändert waren, während bei höherer Temperatur, über 20° bei gleicher Zeitdauer, solche Platten schon stärksten Schleier hatten. Andererseits waren Platten, die bei ununterbrochen tätiger Quecksilberlampe, eingewickelt in verschlossener Pappschachtel, in demselben Raume lagen, nur wenig verändert, während eine vor Lichtwirkung geschützte, aber im Apparate mit der Zimmerluft in freier Berührung befindliche Platte stark schleierte.

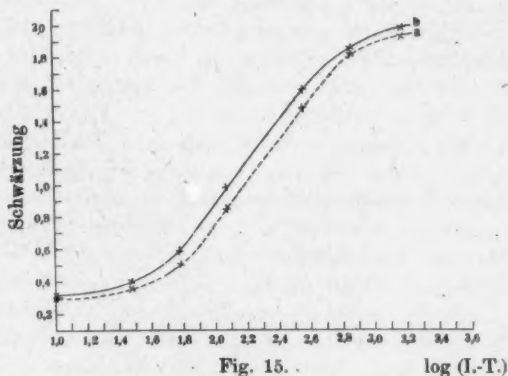


Fig. 15. log (I.T.)

Dieses Verhalten der Platten — das für alle langfristigen Aufnahmen bei stark ultravioletten Lichtquellen wohl zu beachten sein dürfte — konnte unter Umständen die ganzen Messungen in vorliegender Arbeit gefährden, und darum wurden die Platten genauer untersucht.

Zunächst ergab sich aber, daß bei den verhältnismäßig kurzen, rasch aufeinanderfolgenden Aufnahmen mit Bogenlicht keine nennenswerten Änderungen, selbst bei hoher Zimmertemperatur, zu befürchten waren.

Ferner fand ich, daß auch bei den Quecksilberaufnahmen innerhalb der größten von mir verwendeten Expositionszeiten (5 Tage) die Gradation konstant blieb für eine gegebene Wellenlänge.

Es zeigte sich nur eine Parallelverschiebung der Schwärzungskurve, wie dies Fig. 15 erkennen läßt.

Die beiden Kurven sind bei ausgewählt ungünstigen Verhältnissen aufgenommen, wie sie für die Aufnahmen kaum vorkamen, d. h. die Zimmertemperatur sank nicht unter 25° , die Quecksilberlampe brannte außer kurzen, zur Batterieladungen erforderlichen Pausen dauernd, während die Platte offen in der Kassette des Apparates lag.

Zu Beginn (Kurve *a*) und zu Ende (Kurve *b*) dieser fünftägigen Versuchszeit wurden durch Variation der Expositionszeit die Schwärzungswerte erhalten.

Man sieht, daß das latent geschwärzte Bromsilber unverändert blieb und nur das unbelichtet gebliebene in dieser Zeit an Empfindlichkeit zugenommen hatte, ohne seine spezifischen Eigenschaften zu verändern. Die Platte ließ sich noch ohne große Schleier entwickeln.

Da also die Änderung — wenigstens unter den angegebenen Verhältnissen — nur in einer Parallelverschiebung besteht, ist die Intensitätsverteilung der einzelnen Spektralaufnahmen als gesichert anzusehen, nicht dagegen die absolute Schwärzungshöhe jeder einzelnen Kurve.

Aber durch Kontrollversuche ließ sich auch hierfür eine gewisse Sicherheit erhalten. Soweit bei den Aufnahmen bei höherer Temperatur (höher als 18°), wie vorerwähnt, diese Schwärzungsschiebung anzunehmen war, wiederholte ich die Aufnahme mit und ohne Feld auf einer Platte in der Weise, daß mit einer Aufnahme ohne Feld begonnen wurde, dann eine solche mit Feld kam, darauf wieder eine ohne, worauf die Schwärzungen miteinander verglichen und aus gleichen Aufnahmen der Mittelwert genommen wurde.

Auf diese Weise wurden die Aufnahmen kontrolliert und ergaben die im vorhergehenden Abschnitte besprochenen Resultate.

Ferner bestimmte ich die Exponenten der Platten für zwei Wellenlängen und fand die erwartete Änderung.

Legt man die Starksche Formel der Spektralphotometrie zugrunde, so ergibt sich das Intensitätsverhältnis aus den Schwärzungen bei gleicher Expositionszeit, wie dies hier der Fall ist, als

$$i_1/i_2 = e^{\frac{s_2 - s_1}{m}},$$

oder, wenn die Schwärzungsdifferenz ca. 0,3 beträgt, macht eine 10proz. Änderung von m (im Mittel 0,55), dessen Wert genauer nicht zu erhalten ist, schon eine Änderung im Intensitätsverhältnis von 5 Proz. aus, wobei die Meßfehler in der Schwärzungsdifferenz noch nicht in Anrechnung gebracht sind. Eine genauere Bestimmung der Konstanten ist aber nach Obigem ein aussichtsloses Beginnen.

Ich verzichtete daher darauf, genauere Werte aus der photographischen Schwärzung zu nehmen, als sie das spektrophotometrische Verfahren lieferte, zumal in der Erwägung, daß *quantitative Vergleiche: Schwächung als Funktion des Feldes und Extrapolation aus den gemessenen Werten, auf Verschwinden der Fluoreszenz*, wie dies R. W. Wood getan hat, *nur bedingten Wert haben, weil die Schwächung nach allem zuvor angeführtem nicht allein eine Funktion des Feldes und der Dampfdichte ist, sondern in erster Linie eine Funktion der Anregung der Fluoreszenz* oder besser der Schwingungen im Molekül ist und daher *quantitative Vergleiche zwischen Erregungsenergie und Verbrauch pro Molekül* vorausgehen müßten.

Die photographische Untersuchung wurde nicht auf anderes Plattenmaterial ausgedehnt, da, wie p. 74 angegeben, weniger empfindliche Platten die Untersuchung erschwert, wenn nicht unmöglich gemacht hätten. Es ist anzunehmen, daß die beobachteten Erscheinungen auch bei anderen Platten — bei weniger empfindlichen und nicht sensibilisierten wohl in geringerem Grade — anzutreffen sein werden, wobei noch Rücksicht auf die Sensibilisierungsart zu nehmen wäre. Jedenfalls wäre eine genauere Untersuchung für spektrophotometrische Vergleiche aus Schwärzungsmessungen durchaus wünschenswert, ebenso ob sich nicht eine Methode daraus gewinnen läßt, die Plattenempfindlichkeit bis zum Maximum zu steigern für Aufnahmen lichtschwächster Objekte, ähnlich wie dies schon durch die Vorbelichtung geschehen ist.

L. Zum Zeeman- und Starkeffekt.

Über etwaige Strukturänderungen des Spektrums im Magnetfelde ist schon berichtet worden, daß solche weder im Banden- noch im Resonanzspektrum bei dieser Dispersion

erkennbar waren. Damit war die Möglichkeit der mikrophotometrischen Vergleiche gegeben.

Es ist natürlich von Interesse, zu entscheiden, ob außer der hier untersuchten magnetischen Wirkung noch ein Zeemaneffekt im Spektrum auftritt. Die Schwierigkeit der Untersuchung liegt darin, daß die magnetische Schwächung des Spektrums die Anwendung hoher Dispersion durch Gitter ausschließt, und R. W. Wood hat deshalb vor längerer Zeit eine Untersuchung auf Zeemaneffekt, bei der ihm die magnetische Schwächung entgangen war, mit dem Gitter aufgeben müssen.¹⁾

In einer späteren Arbeit, bei der er den inversen Zeemaneffekt untersuchte, fand er, daß ein solcher nicht vorhanden war, wenigstens hätte er bei Feldern von 20000 Gauss kleiner als 0,01 A.-E. sein müssen.

Bei dem in vorliegender Untersuchung benutzten Prismenspektrographen betrug die Dispersion ca. 2,5 A.-E. pro 0,1 mm; selbst bei engstem Spalt (0,02 mm) wären natürlich nur größere Effekte sichtbar gewesen, evtl. Verbreiterungen der Linien, die nicht andeutungsweise gefunden wurden. Ich möchte es aber für wahrscheinlich halten, zumal im Hinblick des Fehlens im inversen Effekte, daß diese magnetische Wirkung im Bandenspektrum des Jod, wie in der Mehrzahl der Bandenspektren, gar nicht vorhanden ist.

Daneben erhebt sich die Frage, ob statt der magnetischen vielleicht eine elektrische Zerlegung der Linien auftreten kann.

Es zeigte sich zunächst, daß das elektrische Feld auf die Intensität der Fluoreszenz nicht den schwächenden Einfluß ausübt wie das magnetische, und es mag hier kurz die Anordnung beschrieben werden, die ich wählte, um die Fluoreszenz nach der Starkschen Methode zu untersuchen. Die folgende Fig. 16 gibt die Form des verwendeten Joddampfgefäßes an. Es besteht in der Hauptsache aus zwei schlierenfrei geblasenen Kugeln A und B von 5,5 cm Durchmesser, die in der Mitte zusammengepaßt sind, indem die vordere A zum Eintritt des Lichtkegels, die hintere zum Austritt dient, während an der Stelle der engsten Einschnürung der Fluoreszenzkegel beobachtet wird.

1) R. W. Wood, Phil. Mag. 1911. p. 471.

Hier stehen im Abstände von ca. 1,5 mm sich zwei parallel in die Wand eingeschmolzene Platinbleche gegenüber, die also die vordere Kugel von der hinteren lichtdicht trennen würden, wenn nicht eine zentrale Bohrung in der Mitte Platz genug für den engen Beleuchtungskegel ließ (vgl. Fig. 16, punktierter Strahlengang).

Damit aber beim Anlegen des Feldes an die Bleche, die mit eingeschmolzenen Zuführungen nach außen versehen sind,

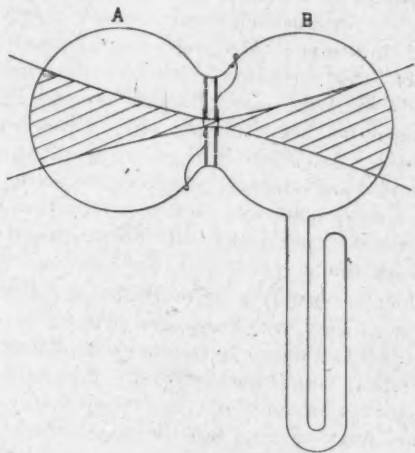


Fig. 16.

nicht in der Öffnung die Entladung eintritt, sind die Öffnungen durch aufgeschmolzene dünne Glasplättchen luftdicht abgeschlossen, während zum Ausgleich des Gasdruckes die Platinbleche eine Reihe feiner Öffnungen tragen. Durch einen Kühllansatz wird in bekannter Weise der Dampfdruck wie nötig reguliert.

Ich fand so, daß man bei dem gewählten Elektrodenabstände bis zu einer Dampfspannung von ca. 0,06 mm (Temp. 10° – 11°) gehen konnte, ohne daß die Entladung beim Anlegen der Hochspannungsmaschine einsetzte. Das erhaltene Feld hatte eine Größe von ca. 18000 Volt/cm.

Um einen möglichst intensiven, gut begrenzten Licht-

kegel zu bekommen, wurde die Untersuchung bei Sonnenlicht im Hörsaal des Institutes vorgenommen.

Ich konnte keinerlei Intensitätsänderungen, ebensowenig Strukturänderungen feststellen, wobei allerdings zu beachten ist, daß die Beobachtung nur mit dem Geradsichtsspektroskop, nicht spektrographisch vorgenommen worden ist.

Schluß.

Als Hauptergebnis der Arbeit möchte ich es hinstellen, daß sich die magnetische Schwächung der Jodfluoreszenz nicht auf bestimmte Vorgänge und Vorstellungen zurückführen läßt, sondern daß es sich hier um eine bislang nicht beobachtete Wirkung eines Magnetfeldes auf die Elektronenschwingungen bei der Emission eines Bandenspektrums handelt, derartig, daß die einzelnen Schwingungen geschwächt werden, und zwar stärker in höheren wie in niederen Frequenzen, ferner, daß das äußere magnetische Feld um so stärker einwirkt, je größer die Schwingungsamplituden bei der Emission sind.

Die hier beobachtete Schwächung des Fluoreszenzlichtes hat also gar nichts mit Vorgängen gemein, wie sie sonst bei Fluoreszenzerscheinungen auftreten, wo die Beimischung fremder Gase, Einfluß von Lösungsmitteln u. ä. die Fluoreszenzfähigkeit des betreffenden Körpers vermindern oder vernichten.

Daraus folgt weiter, daß die magnetische Wirkung mit der eigentlichen Fluoreszenz wenig zu tun hat, vielmehr ist der gleiche Effekt zu erwarten, wenn das gleiche Bandenspektrum auf anderem Wege, etwa im elektrischen Strome, zur Emission gebracht wird. Und zwar ist auf Grund der zuvor festgestellten Tatsache, daß die magnetische Schwächung bei sonst gleichen Bedingungen (Dampfdichte usw.) um so stärker erfolgt, mit je größerer Energie pro Molekül die Emission stattfindet, anzunehmen, daß das elektrisch angeregte Bandenspektrum durch wesentlich schwächere Magnetfelder entsprechend geschwächt wird, vielleicht sogar, daß die Emission durch das Magnetfeld ganz unterdrückt wird, wenn man bedenkt, daß zur Anregung des Bandenspektrums unter normalen Bedingungen im elektrischen Strome ganz andere Energiemengen ins Spiel treten wie bei der Fluoreszenz durch Lichtabsorption.

Da das Jodbandenspektrum nicht nur in Fluoreszenz zu erhalten ist, sondern mit dem im Glimmstrome in der positiven Säule erhaltenen im allgemeinen als identisch angesehen wird, so ist die experimentelle Prüfung obiger Schlüsse möglich.

Zugleich wird zu untersuchen sein, ob das Phänomen nur eine Eigentümlichkeit des Jods ist oder ob es auch bei anderen Elementen und Verbindungen auftritt.

Es kann nach diesem auch nicht auffallen, daß der Effekt bei anderen fluoreszierenden Körpern nicht beobachtet worden ist und meine in der vorigen Arbeit¹⁾ mitgeteilten, an anderen fluoreszierenden Elementen angestellten Versuche negatives Resultat hatten.

Selbst wenn andere Elemente in ihren Bandenspektren dem gleichen magnetischen Einflusse unterliegen sollten, wird die Größe dieser magnetischen Wirkung eine andere sein, und diese hängt von der Stärke des Magnetfeldes einerseits und der Amplitude der Schwingungen andererseits ab, braucht also im Fluoreszenzspektrum bei Magnetfeldern bis 20000 Gauss noch gar nicht wahrnehmbar zu sein und kann erst unter anderen Bedingungen auftreten.

Ich möchte nicht verfehlen, Hrn. Geheimrat Grotrian für die Überlassung seines Elektromagneten meinen Dank nochmals auszusprechen.

Besonderen Dank schulde ich aber der „Rheinischen Gesellschaft für wissenschaftliche Forschung“ in Bonn, durch deren Unterstützung mir die Durchführung dieser Arbeit überhaupt ermöglicht wurde.

Aachen, Phys. Inst. d. Techn. Hochschule, Februar 1918.

Zusatz. — Inzwischen haben weitere Versuche die Richtigkeit obiger Schlüsse in soweit dargetan, als es mir gelungen ist, das Jodbandenspektrum in der positiven Säule des Glimmstromes (Hochspannungsgleichstrom) im Magnetfelde zu untersuchen und sowohl die Schwächung wie Vernichtung der Banden zu verfolgen (es genügen dazu schon ganz schwache Felder, wie nach Obigem zu erwarten war).

1) Vgl. Anm. p. 55.

Dies Verschwinden des Bandenspektrums ließ sich außerhalb des Magnetfeldes bei gleichen Bedingungen nicht willkürlich hervorrufen, etwa durch Änderung der Stromdichte in weiten Grenzen oder durch Vergrößerung des Potentialgefälles, wie sie als sekundäre Wirkungen des Magnetfeldes auf den Strom in Betracht kämen.

Mit Sicherheit möchte ich behaupten, daß dieses Bandenspektrum in Emission sich auf keine Weise in starken Magnetfeldern etwa auf Zeemaneffekt wird untersuchen lassen, weil es im Magnetfeld nicht existenzfähig ist.

Die Wirkung scheint nicht allein auf dieses Jodbandenspektrum beschränkt zu sein, sondern tritt auch bei einzelnen anderen Elementen auf, die typische Bandenspektren besitzen, natürlich nicht allgemein, denn z. B. der Stickstoff zeigt ebensowenig wie die Verbindungsspektren des Kohlenstoffes irgend welche Andeutung dieses Effektes in seinen verschiedenen Bandenspektren.

Die Resultate werden nach Abschluß der noch in Gang befindlichen Arbeit mitgeteilt werden.

Juli 1918.

(Eingegangen 29. Juli 1918.)

